الباب الثالث

الفصل الثالث

الفضاءات الهيلبرتية

1. تعاريف وخصائص عامّة

1.1. الجداء السلميّ وخصائصه

1.1.1 تعريف

ليكن E و F فضاءين شعاعيّين على $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$).

نسمّي **شكلا شبه ثنائي الخطّيّة** معرّفا من E^2 نحو $\mathbb{K}$، كلّ تطبيق u منبعه E^2 ومصبّه $\mathbb{K}$، يكون خطّيّا بالنسبة إلى المتغيّر الأوّل و**نصف خطّيّ** بالنسبة إلى المتغيّر الثاني.

وبعبارة أخرى، نكتب:

من أجل كلّ y مثبّت في E يكون التطبيق الجزئيّ $x\mapsto u(x,y)$ خطّيّا؛ ومن أجل كلّ x مثبّت في E يكون التطبيق الجزئيّ $y\mapsto u(x,y)$ نصف خطّيّ. يمكن تلخيص ما سبق على هذا النحو:

$$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{K}, \forall\ x,x',x'',y,y',y''\in E:$$
$$u(\alpha x'+\beta x'',y)=\alpha u(x',y)+\beta u(x'',y),$$
$$u(x,\alpha y'+\beta y'')=\overline{\alpha}\,u(x',y)+\overline{\beta}\,u(x,y'').$$

يتّضح من خلال هذا التعريف أنّه إذا كان $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ غدا u آنئذ شكلا ثنائي الخطّيّة.

2.1.1 تعريف

نقول عن الشكل شبه ثنائي الخطّيّة u إنّه **هيرميتيّ** إذا حقّق:

$$\forall\ x,y\in E\quad u(y,x)=\overline{u(x,y)}.$$

وإذا كان $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ قيل عن u في هذه الحالة إنّه **متناظر**!

3.1.1 مثالان

1) $u_1:\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$

$$(x,y)\mapsto u_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}.$$

$$u_2 : \mathscr{C}([0,1],\mathbb{C})\times\mathscr{C}([0,1],\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \quad (2$$
$$(f,g) \mapsto u_2(f,g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

(تأكّد من أنّ هذين التطبيقين يحقّقان التعريفين أعلاه.)

4.1.1 قضية

إذا كان u شكلا هيرميتيّا فإنّه من أجل كلّ x و y من E يكون لدينا:

$$u(x+y,x+y)+u(x-y,x-y) = 2\big(u(x,x)+u(y,y)\big), \quad (1$$
$$u(x+y,x+y)-u(x-y,x-y) = 4\operatorname{Re}u(x,y).^{\downarrow} \quad (2$$

إثبات

يكفي استخدام خطّيّة u وكونه هيرميتيّا!

إنّ العلاقة الأولى من هذه القضية مشهورة تحت تسمية **متطابقة متوازي الأضلاع** .

5.1.1 قضية

إذا كان u شكلا شبه ثنائي الخطّيّة على E^2 فإنّه يكون لدينا عندئذ:

u هيرميتيّ $\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in E \;\; u(x,x) \in \mathbb{R}$

إثبات

إنّ لزوم الشرط واضح، ذلك لأنّ العدد $u(x,x)$ حقيقيّ بموجب كون u هيرميتيّا، أي أنّ:

$$\overline{u(x,x)} = u(x,x).$$

بخصوص كفاية الشرط، نعتبر العلاقتين التاليتين:

$$u(x+y,x+y) = u(x,x)+u(y,y)+u(x,y)+u(y,x), \qquad (1)$$
$$u(i\,x+y,i\,x+y) = u(x,x)+u(y,y)+i\big[u(x,y)-u(y,x)\big]. \qquad (2)$$

نلاحظ في هاتين العلاقتين أنّ العناصر:

$$u(x+y,x+y);\; u(ix+y,ix+y);\; u(x,x);\; u(y,y),$$

أعداد حقيقيّة فرضا. نستخلص من (1) أن:

$^{\downarrow}$ يرمز $\operatorname{Re}u(x,y)$ للجزء الحقيقيّ من العدد $u(x,y)$.

$$\alpha = u(x,y) + u(y,x) \in \mathbb{R};$$

ومن (2) :

$$\beta = i\left[u(x,y) - u(y,x)\right] \in \mathbb{R};$$

وعليه:

$$u(y,x) = \frac{1}{2}(\alpha + i\beta) \quad ؛ \quad u(x,y) = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta),$$

ومنه $\overline{u(y,x)} = u(x,y)$. (أي أنّ u هيرميتيّ).

6.1.1 قضية

إذا كان $\mathbb{C} = \mathbb{K}$، فإنّ كلّ شكل شبه ثنائي الخطّيّة على E^2 يكون معرّفا بالقيم التي يأخذها على قطر E^2.

إثبات

وبالفعل لدينا:

$$u(x,y) = \frac{1}{4}\left[u(x+y,x+y) - u(x-y,x-y)\right] + \frac{1}{4}\left[i\ u(x+iy,x+iy) - i\ u(x-iy,x-iy)\right]. \qquad (*)$$

$$+\frac{1}{4}\left[i\ u(x+iy,x+iy) - i\ u(x-iy,x-iy)\right]. \qquad (*)$$

7.1.1 ملحوظتان

1) القضية السابقة تصبح خاطئة في حالة كون $\mathbb{R} = \mathbb{K}$ و u غير متناظر. نستدلّ على ذلك بالمثال الموالي:

$$u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$\left((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\right) \mapsto x_1y_2 + y_1z_2 + z_1x_2 - x_2y_1 - y_2z_1 - z_2x_1.$$

واضح أنّ u ينعدم على القطر بيد أنّه لا يطابق الصفر على $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ كلّه.

2) إذا كان $\mathbb{R} = \mathbb{K}$ و u متناظرا فإنّ النتيجة المنقولة عبر القضية أعلاه تظلّ صحيحة. وعلاوة على ذلك لدينا:

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left[u(x+y,x+y) - u(x,x) - u(y,y)\right],$$

وهو ما يعيّن u في E^2 كلّه.

8.1.1 تعريف

نقول عن الشكل الهيرميتيّ u إنّه **موجب** إذا حقّق:

$$\forall\ x \in E \quad u(x,x) \geq 0;$$

ويكون u **معرّفا موجبا** إذا حقّق:

$$\forall\ x \in E \setminus \{0\} \quad u(x,x) > 0.$$

9.1.1 تعريف

نسمّي **جداء سلّميّا** على E كلّ شكل شبه ثنائي الخطّيّة هيرميتيّ ومعرّف موجب u.

نرمز له عادة بِ $\langle , \rangle$. نكتب عندئذ:

$$\begin{aligned} &E \times E \to \mathbb{K} \\ &(x,y) \mapsto u(x,y) = \langle x,y \rangle . \end{aligned}$$

يمكن التأكّد، دونما عناء، من أنّ التطبيقين الواردين في (3.1.1) يعرّفان جداء سلّميّا، كلّ على فضاء تعريفه !

10.1.1 قضية (متباينة كوشي . شوارز)

إذا كان u شكلا هيرميتيّا موجبا فإنّ:

$$\forall x, y \in E \ \ |u(x,y)|^2 \leq u(x,x).u(y,y)$$

إثبات

من أجل كلّ λ من $\mathbb{K}$ نكتب:

$$0 \leq u(\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda\bar{\lambda}u(x,x) + u(y,y) + \lambda u(x,y) + \bar{\lambda}u(y,x). \ (*)$$

لنضع:

$$u(x,x) = a, \quad u(x,y) = b, \quad u(y,y) = c.$$

تأخذ العلاقة (*) بذلك الشكل التالي:

$$a\lambda\bar{\lambda} + \lambda b + \bar{b}\bar{\lambda} + c \geq 0. \qquad (**)$$

إذا كان $a = c = 0$ حصلنا من (**) على:

$$-b\bar{b} - b\bar{b} = -2|b|^2 \geq 0.$$

وعليه، $b = 0$. العلاقة المدروسة صحيحة في هذه الحالة.

إذا كان $a \neq 0$ حصلنا من أجل $\lambda = -\dfrac{\bar{b}}{a}$ على:

$$a\left(-\frac{\bar{b}}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)-\frac{\bar{b}}{a}b-\frac{\overline{b\bar{b}}}{a}+c\geq 0,$$

أي:

$$-\frac{|b|^2}{a}+c\geq 0.$$

وعليه:

$$|b|^2\leq ac.$$

11.1.1 قضية (متباينة مينكوفسكي)

إذا كان u جداء سلّميّا على E كان لدينا عندئذ:

$$\forall\ x,y\in E\quad [u(x+y,x+y)]^{\frac{1}{2}}\leq [u(x,x)]^{\frac{1}{2}}+[u(y,y)]^{\frac{1}{2}}.$$

إثبات

نعلم أنّ:

$$u(x+y,x+y)=\langle x+y,x+y\rangle=\langle x,x\rangle+2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle,$$

$$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle\leq|\langle x,y\rangle|\leq\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}.$$

إذن:

$$\langle x+y,x+y\rangle\leq\left(\sqrt{\langle x,x\rangle}+\sqrt{\langle y,y\rangle}\right)^2,$$

أي:

$$\sqrt{\langle x+y,x+y\rangle}\leq\sqrt{\langle x,x\rangle}+\sqrt{\langle y,y\rangle}.$$

12.1.1 قضية . تعريف

إذا كان u جداء سلميّا على E فإنّ التطبيق:

$$x\mapsto N(x)=\sqrt{<x,x>}=\sqrt{u(x,x)},$$

يعرّف نظيما على E.

إثبات

يكفي استخدام متباينة مينكوفسكي لضمان متباينة المثلّث.

نستخدم بطبيعة الحال، الرمز نفسه المألوف بخصوص النظيم فنكتب $N(x)=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\|x\|$.

13.1.1

2.1 تعاريف وخصائص عامّة

1.2.1 تعريف

نسمّي **فضاء شبه هيلبرتيّ** كلّ فضاء شعاعيّ E يكون مزوّدا بنظيم ملحق بجداء سلّميّ.

2.2.1 مثال

$E=\mathbb{C}^n$ المزوّد بالجداء السلّميّ $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}$ فضاء شبه هيلبرتيّ.

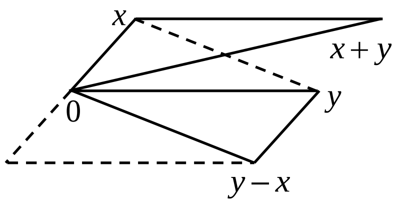
من المهمّ التوقّف هنا للإشارة إلى أنّ **كلّ فضاء شبه هيلبرتيّ فضاء نظيميّ. فهو إذن فضاء طبولوجيّ.** تسحب عليه تبعا لذلك كلّ الخصائص التي سبقت دراستها في الفصول الماضية. ومن المشروع أن يتبادر إلى الذهن التساؤل حول ما يميّز إذن، الفضاءات شبه الهيلبرتيّة عن الفضاءات النظيميّة العامّة. ومن الطبيعي أن نرتقب خصائص مميّزة لنظيم الفضاء شبه الهيلبرتيّ مادام هذا الأخير يمثّل نمطا خاصّا من الفضاءات النظيميّة كما أسلفنا. نستهلّ هذه الخصائص بمتطابقة متوازي الأضلاع السابق ذكرها والتي وعدنا بالعودة إليها.

3.2.1 قضية (متطابقة متوازي الأضلاع)

من أجل كلّ شعاعين x و y من فضاء شبه هيلبرتيّ E تكون لدينا المساواة التالية:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$

(ونقرأها على النحو التالي:
إنّ **مجموع مربّعي طولي القطرين في متوازي أضلاع يساوي مجموع مربّعات أطوال أضلاعه**).



إثبات

يكفي القيام بالتبسيط التالي:

$$\|x+y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle=\|x\|^2+\|y\|^2+2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle,$$

$$\|x-y\|^2=\langle x-y,x-y\rangle=\|x\|^2+\|y\|^2-2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle.$$

وبجمع هاتين المساواتين نحصل على النتيجة المطلوبة.

تحمل هذه المتطابقة أيضا تسمية **مساواة أبولونيوس.** تكمن أهميّها بالدرجة الأولى في كونها تسمح بالتأكّد من أنّ نظيما ما ملحق بجداء سلّميّ

أو لا؛ أي أنّها تسمح بفرز الفضاءات شبه الهيلبرتيّة من الفضاءات النظيميّة العامّة. فإذا حقّق نظيم المتطابقة المذكورة كان ملحقا بجداء سلّميّ. والعكس بطبيعة الحال واضح. نصوغ هذه النتيجة الهامّة هكذا:

4.2.1 مبرهنة

لكي يكون فضاءٌ نظيميّ $(E, \|.\|)$ فضاءً شبه هيلبرتي يلزم ويكفي أن يحقّق نظيمه متطابقة متوازي الأضلاع.

إثبات

نشير بادئ ذي بدء، إلى أنّنا سنبرهن هذه النتيجة في حالة $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

إنّ لزوم الشرط واضح. لنضع، بخصوص كفاية الشرط:

$$u(x,y) = \langle x,y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right); \quad x,y \in E, \qquad (1)$$

ولنبيّن أنّه إذا تحقّقت متطابقة متوازي الأضلاع فإنّ العبارة (1) تقدّم تطبيقا u يحقّق جميع شروط الجداء السلّميّ.

إذا كان $y = x$ ، فإنّنا نستخلص من العلاقة (1) أنّ:

$$u(x,x) = \frac{1}{4}\left(\|2x\|^2\right) = \|x\|^2 = \langle x,x \rangle;$$

وهو بالضبط النظيم الذي يولّده جداء سلميّ على E . وعلاوة على ذلك نلاحظ أنّ:

$$u(x,x) = \|x\|^2 = \langle x,x \rangle > 0, \quad \forall\, x \in E \setminus \{0\},$$

وهو ما يدلّ على أنّ u معرّف موجب.

ومن جهة أخرى، يأتي من (1) أنّ:

$$\forall\, x,y \in E \quad u(x,y) = u(y,x),$$

أي أنّ التطبيق u متناظر.

نعتني حاليّا بثنائيّة خطّيّة u.

نعتبر من أجل ذلك الدالّة φ المعرّفة على هذا المنوال:

$$\varphi(x,y,z) = 4\left(\langle x+y,z \rangle - \langle x,z \rangle - \langle y,z \rangle\right), \quad x,y,z \in E;$$

أي أنّ:

$$\varphi(x,y,z)=\|x+y+z\|^2-\|x+y-z\|^2-\|x+z\|^2+$$
$$+\|x-z\|^2-\|y+z\|^2+\|y-z\|^2. \qquad (2)$$

لنبيّن أنّ φ معدومة. طبقا لمتطابقة متوازي الأضلاع نكتب:

$$\|x\pm z+y\|^2=2\left(\|x\pm z\|^2+\|y\|^2\right)-\|x\pm z-y\|^2.$$

وبالتعويض في (2) يأتي:

$$\varphi(x,y,z)=-\|x+z-y\|^2+\|x-z-y\|^2+\|x+z\|^2-$$
$$-\|x-z\|^2-\|y+z\|^2+\|y-z\|^2. \qquad (3)$$

بجمع (2) و(3) طرفا طرفا نحصل على:

$$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{2}\left(\|x+z+y\|^2+\|y+z-x\|^2\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(\|y-z+x\|^2+\|y-z-x\|^2\right)-\|y+z\|^2+\|y-z\|^2.$$

بموجب متطابقة متوازي الأضلاع يكون الحدّ الأوّل الوارد بين قوسين في طرف هذه المساواة الأيمن مساويا $\|y+z\|^2+\|x\|^2$، في حين يكون الحدّ الثاني (الوارد بين قوسين) مساويا $-\|y-z\|^2-\|x\|^2$، وهو ما يفضى في الأخير إلى أنّ $\varphi(x,y,z)=0$. بهذا نكون قد بيّنا أنّ:

$$\forall x,y,z\in E \quad u(x+y,z)=u(x,z)+u(y,z).$$

بقي أن نبرهن أنّ:

$$\forall \lambda\in\mathbb{R} \quad \forall x,y\in E \quad u(\lambda x,y)=\lambda u(x,y).$$

نعتبر، قصد ذلك، الدالّة ψ التالية:

$$\psi(\lambda)=\langle \lambda x,y\rangle-\lambda\langle x,y\rangle; \quad x,y\in E,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

من (1) يأتي على التوّ:

$$\psi(0)=\frac{1}{4}\left(\|y\|^2-\|y\|^2\right)=0,$$
$$\psi(-1)=0;$$

الأمر الذي يرخّص لنا الحصول على:

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{Z} \quad \langle nx,y\rangle&=\langle(\operatorname{sgn} n)(x+x+\ldots+x+x),y\rangle\\&=(\operatorname{sgn} n)\langle x+x+\ldots+x+x,y\rangle\\&=(\operatorname{sgn} n)\left(\langle x,y\rangle+\langle x,y\rangle+\ldots+\langle x,y\rangle\right)\\&=|n|(\operatorname{sgn} x)\langle x,y\rangle=n\langle x,y\rangle;\end{aligned}$$

(يرمز sgn لإشارة n) أي:

$$\psi(n)=0 \quad \forall n\in\mathbb{Z}.$$

إذا كان p و q عنصرين من $\mathbb{Z}$ بحيث $q\neq 0$ فإنّ:

$$\langle\frac{p}{q}x,y\rangle=p\langle\frac{1}{q}x,y\rangle=\frac{p}{q}q\langle\frac{1}{q}x,y\rangle=\frac{p}{q}\langle x,y\rangle,$$

وهو ما يضمن:

$$\psi(\lambda)=0 \quad \forall \lambda\in\mathbb{Q}.$$

ولمّا كانت ψ مستمرّة (تأكّد من ذلك) ختمنا بأنّ:

$$\psi(\lambda)=0 \quad \forall \lambda\in\mathbb{R},$$

ممّا يجعل u متمتّعا بكافّة شروط الجداء السلّميّ وينهي البرهان.

5.2.1 ملحوظة

بالإمكان الحصول في هذا المضمار على النتيجة الهامّة التالية:

إذا كان E فضاء شعاعيّا حقيقيّا و $x\mapsto\|x\|$ تطبيقا حقيقيّا على E بحيث:

1) $\|x\|\geq 0;\quad \|x\|=0 \Leftrightarrow x=0,$

2) $\forall\lambda\in\mathbb{R}\ \ \forall x\in E\ \ \|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|,$

3) $\forall x,y,z,t\in E\ \ \|x-z\|\|y-t\|\leq\|x-y\|\|z-t\|+\|y-z\|\|x-t\|,$

فإنّ التطبيق $\|.\|$ يعرّف نظيما على E، يكون ملحقا بجداء سلميّ.

نشير هنا إلى أنّ المتباينة الواردة في البند الثالث تحمل إسم **متباينة بطوليمي**.

6.2.1 أمثلة

1) إنّ نظيم التقارب المنتظم في $\mathbb{R}^n$ غير ملحق بجداء سلّميّ. وبالفعل نلاحظ أنّ الشعاعين $x=(1,0,...,0)$ و $y=(0,1,0,...,0)$ لا يحققّان متطابقة متوازي الأضلاع، إذ لدينا:

$$\|x\|=\|y\|=\|x-y\|=\|x+y\|=1,$$

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2;\ 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)=4,$$

2) الوحيد من الفضاءات النظيميّة $L^p\left([a,b]\right)$ الملحق نظيمُه بجداء سلّميّ هو الفضاء $L^2\left([a,b]\right)$.

فإذا اخترنا، على سبيل المثال، الدالّتين:

$$f(x)=1;\ x\in[-1,1];\ g(x)=\begin{cases}-1\ ; & -1\le x\le 0\\ x\ \ ; & 0\le x\le 1\end{cases}$$

في $L^1([-1,1])$ تأكّدنا من أنّهما لا يحقّقان متطابقة متوازي الأضلاع،

وهو ما يدلّ على أنّ الفضاء النظيميّ $L^1([-1,1])$ ليس شبه هيلبرتي. ها هو الحساب:

$$\|f\|=\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx=\int_{-1}^{1}dx=2,$$

$$\|g\|=\int_{-1}^{1}|g(x)|\,dx=\int_{-1}^{0}dx+\int_{0}^{1}x\,dx=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$\|f+g\|=\int_{-1}^{1}|f(x)+g(x)|\,dx=\int_{0}^{1}(1+x)\,dx=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$\|f-g\|=\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|\,dx=\int_{-1}^{0}2\,dx+\int_{0}^{1}(1-x)\,dx=2+1-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$$

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=\frac{9}{4}+\frac{25}{4}=\frac{17}{2}\neq 2\left(\|f\|^2+\|g\|^2\right)=\frac{25}{2}.$$

3) إنّ الفضاء $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ ليس شبه هيلبرتي إذا ما زوّد، على سبيل المثال، بنظيم التقارب المنتظم. تمكن الاستعانة بالدالّتين $f(x)=1$ و $x=g(x)$ حيث x من $[0,1]$، للاستدلال على ذلك. نجد في هذا الصدد:

$$\|f\|=\sup_{0\le x\le 1}|f(x)|=1,$$

$$\|g\|=\sup_{0\le x\le 1}|g(x)|=1,$$

$$\|f+g\|=\sup_{0\le x\le 1}|f(x)+g(x)|=\sup_{0\le x\le 1}(1+x)=2,$$

$$\|f-g\|=\sup_{0\le x\le 1}|f(x)-g(x)|=\sup_{0\le x\le 1}(1-x)=1,$$

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=5\neq 2\left(\|f\|^2+\|g\|^2\right)=4.$$

7.2.1 تعريف

نسمّي فضاء **هيلبرتيّا** كلّ فضاء شبه هيلبرتيّ تامّ.

يترتّب عن هذا التعريف بالخصوص أنّ كلّ فضاء هيلبرتيّ فضاء بناخيّ متميّز. نستخلص ممّا سبق أنّ الفضاءات $L^p([a,b])$، $1\le p$، فضاءات بناخيّة في حين لا يكون منها هيلبرتيّا سوى $\boldsymbol{L^2([a,b])}$.

8.2.1 مثال

إنّ الفضاءين $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{C}^n$ هيلبرتيّان إذا ما زوّدا بجدائيهما السلّميّين التقليديّين $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ و $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \overline{y_n}$.