**تــطــور عـلـم الجــبــر بــعــد الخــوارزمــي**

عـلـم الجبر تـطـور عـبر ثلاث مـدارس :

1° ) مـدرســة أبـي كـامـل، وسنـان بن الفـتـح

2° ) مـدرســة أبـي بكـر الكرجـي والسـمـوأل الـمغـربي

3° ) مـدرســة الـطـوسـي

ولا بــدّ أن نشيـر إلى أن مـا بين الخوارزمي وأبي كامل عـاش رياضيون بارزون عمـلوا في الجبر، منهم: ثـابت بن قـرة الـذي عاش ( 209ه/834م ــ 288ه/901م ) وكان مع الخوارزمي في بيت الحكمة الذي أنشـأه هارون الرشيد ورعاه المأمون من بعده. وأبو عيسـى المهاني ( ظهر حوالي 221ه/853م ، وتوفي 243ه/874م )، وكان معاصرا للخوارزمـي، ويبـدوا أنه عـرف المعادلـة من الـدرجـة د°3 وحـاول حلهـا، غير أنه لم يفلح، وجـاء بعده الخازن ونحج في حلها. وبـعــدهم جاء الرياضيان أبو كامـل ( ت 318هـ/930م ) وابن سنـان ( عاش 296ه/908م ـــ 335ه/946م ) ، وهو حفيد ثابت بن قـرة، ولهـما في الجبر إســـام هــامّ شكل مدرسة متميـزة بعد الخوارزمـي.

1° ) مـدرســة أبـي كـامـل وابن سنـان، وهـو أسلـم بن شـجـاع المصري، وتتـمـثـل هـذه المـدرسـة في مـضـامين مؤلفـات أبي كامل، ومـؤلـفات مـعـاصره سنان بن الفتح.

ومن مؤلفات أبـي كامل في الرياضيـات:

1 ) كـتـاب الـكـامـل في الجبر والمقابلـة

2 ) طـرائق الحساب.

يشتمـل كتابـه الـكـامـل في الجبر والمقابلـة، عـلـى أهـم أعـمـالـه الرياضية، وهـو ثـلاثـة أقـســام:

الــقــســم الأول يمـاثـل في تركيبه كتاب الجبر والمقابلة للـخـوارزمـي، فـهـو يـعـيـد نفس تصنيف المـعـادلات أي ثلاث مفردات وثلاث مقـترنات، وبنفس الترتيب الذي وضعـه الخوارزمـي. ويعـتـبر مؤرخـو الرياضيات أن كتاب أبي كامل أعـلـى مسـتـوىً من كتاب الخوارزمـي، فـقـد أدخـل الأعـداد الـصـمّـاء في معامـلات تلك المعـادلات، الأمـر الذي لا يوجـد في معـادلات الخـوارزمـي.

وفـي الــقــســم الـثـاني بـيّــن أبو كامل أن طـرقـه الـجـبـريـة يمكـن أن تسـتعـمـل لإيـجـاد حلـول سهلة لمسـائـل هنـدسـيـة كانت صعبة الـحـل، أو غير قابلـة للحـل عند أسلافـه.

1 ) انتـصـر أبو كامل للخوارزمي واعتبره هو المؤسـس الأول لـعــلـم الجبر، وإليه يرجـع الفضـل في اختراعـه، ولم يسبقه أحد إليه، فقال في مقدمة كتابه: "... وقد وجدت من تقـدم من أهل المعرفة وسبق من أولي الأدب والحكمة لم يـدَعوا شيئـا من أصناف العلوم جليلها ودقيقها، إلا تأملوه وأنعموا النظر فيه، وقـد أتقنوا علمه ووقعوا وجوهه ومعانيه وحدوده بعد اجتهاد الرأي، وإحكام الصنعة، ودوّنوه لمن بعدهم لئلا يستأثروا به عليهم، ولا يخُصُّـوا أنفسهم بمعرفته دونهم، ولا يكتمونهم إياه فيحتملوا وزره، ويكتسبوا إثمه؛ وكنت كثير النظر في كتب العلماء بالحساب والبحث عن أقاويلهم، والتفتيش لما رسموه في كتبهم، فرأيت كتاب محمد بن موسى الخوارزمي المعروف بالجبر والمقابلـة أصحَّها أصلا، وأصدقَها قياسا، وكان مما يجب له علينا، معشر الحساب، من التقدمة والإقـرار له بالمعرفة والفضل، إذْ كان السابق إلى كتاب الجبر المقابلة، والمبتدئ له والمخترع لما فيه من الأصول التي فتح الله لنا بها ما كان منغلقا، وقـرّب بها ما كان متباعدا، وسهّـل بها ما كان معسَّـرا، ونـوّر بها ما كان ملتبسا، التضـرُّع إلى الله عـز وجل بالدعاء له، والترحُّـمِ عليه، والقيام بنصره، وإظهار ما ستر من معرفته وكشف ما غُطِّي من سرائره؛ ورأيت فيه مسائل ترك شرحها وإيضاحها، وكان مما امتن الله عـز وجـل عـلـيّ وخصني من نعمه وفضله وإحسانه، أن وهب لي من المعرفة بالحساب وكـشَف لي من سرائـره، وبيَّن لي من غوامضه ما تخلصت ووصلت به إلى أصول منغلقة، وقياسات غير منفتحة، ففَـرّعتُ منها مسائل كثيرة، تخـرج أكثرها إلى غير الضـروب الستـة التي ذكرهـا الخوارزمي في كتابه، ... " .

2 ) وإذن، فقد أعـاد أبو كـامـل دراسـة المـعـادلات الـسـت للخوارزمي، وبنفس ترتيبه لـهـا، وأضاف بعـض الخـصـوصـيـات التي تمـيـز دراسـتـه، ومن تلك الخـصـوصيـات نـذكـر:

3 ) درَس ( في كـتابـه الـكـامـل في الجـبـر والـمـقــابـلـة ) معـادلات مـعـاملاتـهـا أعـداد صـماء، مثل:

عشرة قسمتها قسمين فقسمت هـذا على هـذا وهـذا على هـذا، وجمعت القَـسميـن فبلغ جـذر خمسـة

$\frac{10 -x}{x}$= $\frac{x}{10 -x}$ = $\sqrt{5 }$

4 ) أدخـل فـي أعمالـه أعـداد صـمّـاء مـن الـشـكــل: $ 1. a+ \sqrt{b} $

$$2. \sqrt{a}+ \sqrt{b}$$

$$3. \sqrt{a}+ \sqrt{b}= \sqrt{a+b}+2\sqrt{ab} $$

$$4. a- \sqrt{b}$$

$5. \sqrt{a}- \sqrt{b}$

5 ) بـيَّــن أبو كامـل في الـقـسـم الثالـث، أن الطرق الـعـددية والجبرية يمكـن استعـمالهـا لحل مسائل هندسية، مثـل مسائل التعيين العـددي لأطـوال أضـلاع كل من: المخمـس المنتـظـم، والمعـشّـر المنتظـم، والشكل المنتـظـم ذي الـ 15 زاوية إذا كـان مرسومـا في دائـرة قطرها 10 وحـدات طولية؛ فـأطوال تلك الأضـلاع مجـهـولة، لكن أبـا كـامـل استطاع صياغـة مسائلها بمعادلات جـبـريـة، وتـَـمَكَّـن من تعيين تلك الأطوال بحل تلك المعادلات.

6 ) درس أبو كامـل معـادلات من الدرجـة الرابعـة يمكـن إرجاعـهـا إلى أحـد الضـروب الستـة للخوارزمي.

7 ) درَس أبو كامـل وحيـدات الـحـدّ، ووسَّـع مفـهـوم الأسّ عنـد الخـوارزمـي، كمـا يلـي:

رأينـا أن دراسة الخـوارزمـي كانت كما يـلـي:

الأعـداد عنده إمـا ثابتة محددة مثـل

1 و 2 و 3 و .... و 10 و 100 و ... و . $\frac{1}{2}$ و $ \frac{1}{3} $ و$ و \frac{2}{3} $.... و جـذر عدد محدد؛

 وإمـا مجـهـولة مثـل $x$ و $x^{2}$  *و...* يطلب تعيينهـا.

**فأبـو كـامــل استعـمل نفس الأعـداد ونفس الأســس التي استعملهـا الخـوارزمـي وزاد عليها الأعــداد الصـمــاء، كمـا يلـي**:

[$c$ ] الـعـدد الثابت

[$x$] جـذر الـمـال = الشيئ = المـجـهـول

[$x^{2}$] الـمــال وهو من ضرب الشيئ في الشيئ

[$x^{3}$ ] الـكـعــب وهو من ضرب المـال في الشيئ

[$x^{4}$] مــال الـمـال، وهو من ضرب المال في المال ، أو من ضرب الكعب في الشيئ

[$x^{5}$] مـال الكـعـب، وهو من ضرب الكعب في المـال.

[$x^{6}$] كـعـب الـكـعـب، وهو ضرب الكعب في الكعب

8 ) وإضافة إلى كـل ذلـك، فقـد ستعـمـل أبـو كامل في كتابه براهين هندسية على وجود حلول موجبة لمعادلات من الدرجة الثانية تـعتـمـد علـى بعض مبرهنات أقليدس، مـثـل بـرهـانـه عـلى وجـود الحـل الموجب لمسألة الـخـوارزمـي: مـال وعشرة أجـذاره تـعـدل تـسـعة وثـلاثيـن ، بالشـكـل:

فـرض الـمـال $^{2}$ ، فـجـذره هو $x$ ، فالمعـادلـة $x$ تكتـب بالشكل: $x^{2}+10x =39$

وبـرهـن أبو كامل على وجود الـحـل الموجب لها باستعمال السادسـة من ثانية أقليدسE( 6, II)

كـمـا يـلـي: ح ه أ د

الخط أ ح نصف في هـ وزيــد عليه د أ ، فحسب السادسة من ثانية أقليدس E( 6, II) الـتـي نصهـا: "**إذا قُـسِـم خط مستقيم بنصفين وزيـد عليه زيادة، فإن السطح القائم الزوايـا الذي يحيط به الخط كله مع الزيادة والـزيادة، ومربـع نصف الخط يسـاوي مـربع الـخط الكائن من نصف الخط والزيـادة**"

فحسب هذه المبرهنة يكون ح د × أ د + (أ هـ)2 = (ه د) 2 ، وبالتعويض نجـد:

$$\left(10+x\right) x  +\left(\frac{10}{2}\right)^{2} =\left(\frac{10}{2}+x\right)^{2}$$

$$\left(\frac{10}{2}+x\right)^{2}=39+\left(\frac{10}{2}\right)^{2}$$

ومنه $x= \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^{2}+39 }- \frac{10}{2}$

وللـتـعـمـيـم كتب: $x^{2}+bx =c$

$$x \left(x+b\right)+\left(\frac{b}{2}\right)^{2}=\left(\frac{b}{2} +x\right)^{2}$$

ومـنــه $x= \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^{2}+c }- \frac{b}{2}$



9 ) كـمـا أدرج أبـو كـامـل في كـتـابـه عـددا من المسـائل السـيـالـة أي ( التي تقبل صوابات كثيرة، أو لهـا عـدد غير منته من الـحـلـول ) .

10 ) لـم يتطـرق أبو كـامل إلـى مسائل الإرث والوصايا التي عالجها الخوارزمي في القـســم الـثـانـي من كتابه.

لـقد كان لكتاب أبي كامل تأثير عميـق في التطـور المبـكـر للجـبـر، في الغرب الإسلامـي، وفي أوروبـا خاصـة من خلال مضامين كتابي الـرياضـي الإيطالـي لـيـونـاردو فـيـبـونـاتـشي ( الذي قـدم به أبوه بوناتشي إلى مدينة بجاية،Leonardo Fibpnacci ( 1170 – 1240 ) فتعـلـم العربية ودرس الحساب والجـبـر، لقـد اطلـع ليوناردو عـلـى كتاب أبـي كـامـل واقتبس منه في كتابيه ( لـيـبـرا أباسي أي كتاب الحـسـاب ) ( Libra Abaciوكتابه الآخـر في الهندسة ) ( practica Geometriea وهـذا حسب دراسات حديثة لمضامين كـتابـي ليونـاردو ومقارنتـهـا بمـضـامين كـتـاب أبي كامـل.

لـقـد ترسخ خلال فترة القرنين الميلاديين ( 10 و 11 ) تـقـلـيـد رياضي جبـري عـربي قـام بـه أعـلام من العلمـاء كان الخوارزمـي هـو رائـدهم الأول.

وعـلى خطـى أبي كامل (ت318هـ/930م)، وسـنـان بـن الـفـتـح (من القرن 10م) ، سـار الـكـرجي والسموأل المغربي وعمر الخـيـام وشـرف الـديـن الــطـوسـي، وغيـرهـم، وتعلقت إسهـاماتهم بالميـدانين اللذيـن تـعـرض لهمـا الخـوارزمـي في كتابه المختـصـر في الجبر والمـقـابـلـة، وهمـا مـيـدان موضوعـات الجـبـر، وميـدان العـمـلـيـات التي يطبـق فيـهـا.

**إسـهــام سـنـان بـن الـفـتـح ( القرن 10م )**

تركـز إسهام سنان بن الفتح ( وهـو أحـد ريـاضيي مـدرسـة أبي كـامـل ) في موضوعات الجبر كما أصَّـلَـها الخوارزمي وأبو كامـل، ولـكـنـه سعى إلى تـعـمــيــم مـفــهــوم الأس (أسـس وحيدات الحــد )، وتـطـبـيـقـه في دراسـة الـمـعـادلات، وقـــام بإعـطـاء عـرض كـامـل متمـاسـك عـن فــكــرة الأســس وتـوسـيـعـهـا من الأس2 إلــى الأس 9. فقد ألف كتبا منها:

1 ) كتاب شرح الجبـر والمقابلة للخوارزمي.

2 ) كتاب حساب الوصايا.

3 ) كتاب المكعبات، وهو أهـمّ كتبه، وذكـر فيه بأنـه أول من قـام بتوسيع فكرة الأســس قائـلا:

" إن جُــلّ مـعرفـة الـحُــسّــاب (جمع حاسب) هـو النـسبة والـتـعـديل (المعادلات) ، وقـد وضـع محمد بن موسى الخـوارزمـي كتـابا سـمّاه الـجـبر والمـقـابلــة، وقـد فـسّـرنا ذلـك، وســنــح لـنا بـعـد تـفـسـيـره، بـابــا يـتـشـعّب عـلـى قـيـاسـه، يـقـال لـه بـاب الـكـعــب ومـال الـمـال والـمــداد، ولـم نـر مـن أهـل الـعـلـم مـمـن سـبـقنـا، وانـتـهـى إلـيـنـا خـبـره، وضـع فـي ذلـك عـمــلا أكـثـر مـن الـتـسـمـيـة، فـأحببــنـا أن نـضـع فـي ذلك كتـابـا نبـيّـن فيـه مـذهـب قـيـاسـه، والله المـوفـق لـمـا أحـبّ والمـعـيـن عـليـه " ؛ " فالحساب تجري أعـداده إذا أخرجت عـلى النسبة على التوالى عـلى أن يسمى الأول من ذلك عــددا، والثاني جـذرا، والثلث مـالا، والرابع مكعبا، والخامـس مـال مـال، والسـادس مــدادا، والسـابـع مـال الكعب، ثم تكون النسبـة الثامنة، والنسبة التاسعة،..، غـيـر أن العــادة على ذلك جرت،.. ، وذلك ما أحببت، وهو على تركيب حساب الهنـد .. " .

وهكذا وسع سـنـان أسـس وحـيـدات الـحـدّ، بالمقابلة بين قـوى 10 وبين تلك الأسس، كمـا يلـي:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** |
| **واحد** | **عــشــرة** | **مـائة** | **ألــف** | **عــشرة آلاف** | **مـائة ألــف** | **ألف ألـف** | **عشرة ألف ألـف** | **مائة ألف ألـف** |
| **عــدد** | **جـــذر** | **مـال** | **كــعــب** | **مــال مـــال** | **مــــداد** | **مـال كعب** | **النسبة الثـامنة** | **النسبة التـاسعـة** |

[$c$ ] الـعـدد الثابت ، [$ x $] الشيئ

[$x^{2}$] الـمــال $\frac{x^{2}}{} =\frac{x}{1} $

[$x^{3}$ ] الـكـعــب $\frac{x^{3}}{x^{2}}=\frac{x^{2}}{x}=\frac{x}{1}$

[$x^{4}$] مــال الـمـال $\frac{x^{2}}{x}=\frac{x}{1}$ $=$ $\frac{x^{4}}{x^{3}} =\frac{x^{3}}{x^{2}}$

[$x^{5}$] الـمـداد $=\frac{^{2}}{}=\frac{x}{1}$ $\frac{x^{5}}{x^{4}}=\frac{x^{4}}{x^{3}}= \frac{x^{3}}{x^{2}}$

[$x^{6}$] كـعـب الـكـعـب $\frac{x^{2}}{x}$= $\frac{x}{1}$ = $\frac{x^{6}}{x^{5}}=\frac{x^{5}}{x^{4}}=\frac{x^{4}}{x^{3}}= \frac{x^{3}}{x^{2}}$

**مـلاحـظــة**

1. يمكن أن نستنتج أن سنان بن الفتح قـد اسـتـشـرف فـكـرة ضـرب الأسس بالشـكـل:

$ x^{4}=x^{2}×x^{2}=x^{2×2}$ و $x^{6}=x^{3}×x^{3}=x^{3×2}$

والذي توصل إليها بالفعل وصاغها كما نعرفهـا اليـوم هو السموأل.

2) أطـلـق سنان بن الفـتـح على وحيدات الحـد $x^{n}$ حيث $ 7\leq n \leq 9$ التـسمـيـات التالـيـة:

 $x^{7}$ الـنـسـبـة الـثـامنـة

 $x^{8}$ الـنـسـبـة الـتـاسـعـة

 $x^{9}$ الـنـسـبـة الــعــاشــرة

وهـكـذا نلاحظ تـطـور الـجـبـر من ريـاضـي إلـى آخـر بظـهــور تجـديـد مـا.

وإلى جانب كتب الجـبر تلك، نـذكـر بعض كتب الحساب التي ظهـرت في القرن 10م مــثــل:

1 ) كتاب الأرثـمـاطيقي في الأعـداد والجبـر والمقابلـة، للـسَّــرَخْــسـي (ت286/899م).

2 ) كتاب المعـاملات وكتاب المساحـة لابـن بـرزة (ت298/910م).

3 ) كـتـاب الفصـول في الحسـاب الهندي لأحمـد بن إبــراهـيـم الأُقـلـيـدسـي (ت953م)، وقـد بحث الأقليدسي في كيفـية لإيجاد الجـذر التربيعي لـعــد طبيعي $N$ وأعطى التقـريب التالي: إذا كان $N=a^{2}+r $ ، حيث $a$ هو الجـذر التـربيعي التام للعدد $N$ و $r$ هـو باقي الجـذر، فإن الجذر التـربيعي التقريبي لـ $N$ هــو ، $\sqrt[2]{N}=a+ \frac{r}{2a+1}$وذكـر أن الخوارزمي أعطى التقريب

 $\sqrt[2]{N}=a+\frac{r}{2a}+\frac{1}{2}$

4 ) كـتـاب أصـول حـسـاب الـهـنـد لأبي الحسـن كـوشـيـار بن لـبـان (ت1000م).

5 ) كتـاب المقــنـع في الحـسـاب الهندي لـعـلي بن أحمـد النـسـوي ( $ م1030≈ت$).

6 ) وبـعـدهـم ألّـف أبـو منصـور عبد القاهـر (ت.../1037م)، وهو فقيـه شـافـعـي بغـدادي شهـيـر كـتـابـه الــهــامّ الــمــســمـى بالتكمـلـة في الحــســاب، الذي اشـتـمـل علـى فنون من أبـواب الحساب، واسـتـخـراج الجـذور التربيعــية والجذـور التكعيبيةـ وبـاب العمليات على الكسـور، وباب حساب الـدُّرَج والــدقايــق والثواني، وباب جمع الآحـاد والأزواج والمربعات والمكعبات وما إليها، وباب كيفية استخراج الأعــداد المتحابة، وباب حسـاب الـيـد، ومسـائل سيـالـة، ولـه أيــضـــا رسـالـة في المـسـاحـة.

لقد بحث ابن اللبان وتلميذه النسوي عـن كيفية لإيجاد الـجذر التكعيبي لعـدد كمـا يلي:

إذا كان $N=a^{3}+r $ ، حيث $a$ هو الجـذر التكعيبي التام للعدد $N$ و $r$ هـو باقي الجـذر، فإن الجذر التكعيبي التقريبي لـ $N$ هــو: $\sqrt[3]{N}=a+ \frac{r}{3a^{2}+1}$

**الـمــدرســة الـثـانـيـة: الـكـرجـي والـسـمـوأل**

وتمثلهـا مـؤلـفـات كـل مـن الـكـرجـي ( ت .../ 1029 م ) والـسـمـوأل المغـربـي ( ت 1175 م )

ومـن أهـم مـؤلـفـات الـكـرجـي التي وصلتـنـا نـذكـر:

1 ) كـتـاب الـكـافـي فـي الـحـسـاب

2 ) كـتـاب الـفـخـري في الجـبـر ألفـه بين سنتي 401ه و 407ه، باسـم الوزير فخر الملك أبي غالب محمد بن خلف ) .

3 ) كـتـاب الـبـديـع في الحـسـاب والـجبـر والمقـابلـة .

4 ) إنبـاط المياه الـخــفـــيـة

وأهـمّ مـؤلـفات الـسـمـوأل التي وصلتنا:

1 ) كـتـاب الـبـاهـر فـي الـجـبـر ( في الـريـاضـيـات )

2 ) القـوامـي في الحـسـاب الهندي

3 ) إفـحـام الـيـهـود ( كان السموأل يهـوديـا فأسلم، وبين في هذا الكتاب مخالفات اليهود )

قال الـكـرجـي في مقدمة كتابه الفخري " ... إني وجدت علم الحساب موضوعا لإخراج المجهـولات من المعـلومـات في جميع أنواعه، وألفيت أوضح الأبـواب إليه وأدل الأسباب عليه صناعة الجبر والمقابلة لقوتها واضطرادهـا في جميع المسائل الحسابية على اختلافها، ورأيت الكتب المصنفة فيها غير ضامنة لما يحتاج إليه من معرفة أصولها، ولا وفـيّـة بمـا يستعان به علـى علم فروعها ... ، ثم إني لم أجـد في كتبهم لها ذكـرا ولا بيانا، فلما ظفرت بهذه الفضيلة واحتجت إلى جـبـر هـذه النقـيصـة، لم أجـد بـدا من تأليف كتـاب يحيط بها ويشتمل عليهـا، ألـخـص فيه شـرح أصولها، مصـفى من كـدر الـحـشـو ودرن اللـغــو، ... "

لقد مثّـلـت مؤلفات الكـرجي وأعماله الرياضية، التي تناولهـا السموأل بعده بالشرح والتوسيع، طـفـرة في الجبر، أو تطـويرا للجبر بالنسبـة لسابقيه الخوارزمـي وسـنـان بن الفتـح وأبي كـامـل، وذلك بالبحث عن سبـل لتـحقيق استقلالية الجـبـر تمـاما عن الهنـدسـة، بالاستغـنـاء عن التمثـيل الهندسي للعمليات الجبـرية، هـذا العـرض الجـديد للحساب الجبري، الذي يسميه بعضهم " حـسـبـنـة الجـبـر" ، اعــتـمـادا عـلى جبر الخوارزمـي المطـوَّر والمـشروح من قِبـل أبي كامل وابن سنان وغيرهم، والممزوج بمضـامين المسائل الـعـدديـة لذيـوفـنـطـس التي دروسها وشرحهـا رياضيـو الإسـلام على ضوء جبر الخـوارزمـي المطـور، هـذا المسعى مـكّـن رياضيين، كالبوزجاني والكـرجي والسموأل، من التصرف في الجبر كمـا يتصرف الحاسب في الحساب، مكّنهم من تيسيـر الحساب الجـبـري، ومن إعـطـاء انـطـلاقـة جديدة للجـبـر، وعلـى حـدّ تـعـبيـر السـمـوأل، فإن المقصـود هـو: " التصرف في المجـهـولات بجميع الأدوات الحسابية، كمـا يتصـرف الحاسب في المعلومات"، فإسهامات الـكـرجي والسموأل تتمثـل فيما يلي:

1) شـرع الكرجي في تطويره للجبر بعـرضٍ لـلأســس الجبرية، كمـا ذكر في كتابه الـجـبري: "المقادير هي الكمية المتصلة، وهي أربعة: الخط والسطح والجسم والزمـان ... وعـادة الجبريين أن يسموا ــ في صناعتهم ـــ المجهول الذي يُـراد استخراجُه شيئـا، ومضروبَه في مثله مالا، ومضروب ماله فيه كعبـا، ومضروب مالِه في مثله مالَ مالٍ، ومضروبَ كعبِه في مالِه مالَ كعبٍ، ومضروب كعبِـه في مثلِـه كعبَ كعبٍ، وعلى هذا القياس بالِغا ما بلَـغ، ومعلوم من كتاب أقليدس في الأصول أن هذه المراتب متناسبة، أعني نسبة الواحد إلى الجـذر كنسبة الجـذر إلى المال، وكنسبة المـال إلى الكعب، فيكون نسبة العدد إلى الجذور، كنسبة الجذور إلى الأموال، وكنسبة الأموال إلى الكعاب، وكنسبة الكعاب إلى أموال الأموال، بالغا مـا بلغ " . ولأجل ذلك قـام بـدراسة أسـس وحيدات الحـدّ، ثم تطبيق العمليـات الحسابية عليها وعلى كثيرات الحـدود كما تجري هـذه العمليات على الأعـداد. فـبدأ بدراسـة متتالـيـة الـقـوى: $x , x^{2} , x^{3} ,…, x^{9},…$ حيث: $ x^{n}=^{n-1}×x$

ثـم عـرف الأجـزاء: جـزء الـشـيئ هـو $\frac{1}{x}$ ، وجـزء المال هـو $\frac{1}{x^{2}}$ ، وجـزء الكعب هـو $\frac{1}{x^{3}}$ ، و...

وجزء المال هو الجـداء: $\frac{1}{x} × \frac{1}{x}= \frac{1}{x^{2}}$ ، وجزء الكعب هو الجداء $\frac{1}{x} × \frac{1}{x^{2}}=\frac{1}{x^{3}}$ ، و...

وأعطي التناسبات: $\frac{x}{x^{2}}= \frac{x^{2}}{x^{3}}= \frac{x^{3}}{x^{4}} =…$ = $\frac{1}{x}$

واستخـرج متتالية الأجـزاء: $\frac{1}{x} , \frac{1}{x^{2}} , … , \frac{1}{x^{9}} , …$ حيث $\frac{1}{x} × \frac{1}{x^{n-1}}=\frac{1}{x^{n}}$

ثم أعطى قـواعـد أخـرى تيسِّـر العمليات الحسابية على وحيدات الـحـدّ، وعلى العبارات الجبرية، والتي تفضي إلى جبر كثيرات الحـدود: $\frac{1}{x} : \frac{1}{x^{2}}= \frac{1}{x^{2}} :\frac{1}{x^{3}} =…$ ( 1

2 ) $\frac{1}{x} : \frac{1}{x^{2}}= \frac{x^{2}}{x} =\frac{x^{3}}{x^{2}} =…= \frac{1}{x^{n-1}} :\frac{1}{x^{n}} = \frac{x^{n}}{x^{n-1}}$

3 ) $\frac{1}{x} × \frac{1}{x}= \frac{1}{x^{2}} ; \frac{1}{x} × \frac{1}{x^{2}}=\frac{1}{x^{3}} ;$

4)$\left\{\begin{array}{c} \frac{1}{x} × \frac{1}{x}=\frac{1}{x^{2}} ; \frac{1}{x} × \frac{1}{x^{2}}=\frac{1}{x^{3}}= ;…; \frac{1}{x^{n}}×\frac{1}{x^{m}}=\frac{1}{x^{n+m}} ; n و m=1,2,3,…\\\frac{1}{x} × x^{2}=\frac{x^{2}}{x} ; \frac{1}{x} ×x^{3}=\frac{x^{3}}{x} ; …; \frac{1}{x^{n}}×x^{m}=\frac{x^{m}}{x^{n}} ; n و m=1,2,3,…\end{array}\right.$

2 ) تكمـن أهمية هـذه الدراسة في أن الـسـمـوأل ( وهو الشارح والمكمـل لجبر الكرجي ) استـطاع انـطلاقـا منها أن يعطي لأول مرة في تاريخ الرياضـيـات أس جـداء وحيد حـدّ بأسـيـن مختلفين، أعني:

 $ x^{n}×x^{m}=x^{n+m} ; n و m=1,2,3…$

وهـذه وحـدهـا تـعـتـبـر من مميزات مدرسة الكرجـي التي توصـل إليهـا الـسـمـوأل. بل إن السموأل اجتاز واحدة من أعـوص العقبات في طريق الجبريين من قبله، ألا وهي قيمة القوة صفر لـوحيـد حــدّ، لكـن السموأل تـمـكّـن من تخطيهـا، وهي $x^{0}=1$ ،من أجـل كل عـدد غير معدوم $x\ne 0 $ ، وبفضـل استعمال الجداول، استطاع أن يكتب على جهتي $x^{0}$ متتاليـة القـوى ومتتاليـة الأجـزاء:

القـوى $x , x^{2} , x^{3} ,…, x^{9},…$ ، والأجـزاء $\frac{1}{x} , \frac{1}{x^{2}} , … , \frac{1}{x^{9}} , …$

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |  |
| $$\frac{1}{x^{2}}$$ | $$\frac{1}{x^{2}}$$ | $$\frac{1}{x^{2}}$$ | $$\frac{1}{x^{6}}$$ | $$\frac{1}{x^{5}}$$ | $$\frac{1}{x^{4}}$$ | $$\frac{1}{x^{3}}$$ | $$\frac{1}{x^{2}}$$ | $$\frac{1}{x}$$ | 1 | $$x$$ | $$x^{2}$$ | $$x^{3}$$ | $$x^{4}$$ | $$x^{5}$$ | $$x^{6}$$ | $$x^{7}$$ | $$x^{8}$$ | $$x^{9}$$ |  |
| $$\frac{1}{512}$$ | $$\frac{1}{256}$$ | $$\frac{1}{128}$$ | $$\frac{1}{64}$$ | $$\frac{1}{32}$$ | $$\frac{1}{16}$$ | $$\frac{1}{8}$$ | $$\frac{1}{4}$$ | $$\frac{1}{2}$$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |  |

3 ) قـامت هذه المدرسة بدراسة للمعادلات الست للخوارزمي بطريقة مختلفة من وجهـيـن:

الأول على مستوى البراهين: براهين شبه جبرية ( مجردة مـن الهندسة ) ، فمثـلا قـاـم الكرجـي ببرهان معادلة الخوارزمي: $x^{2}+10x =39$ ، وشـكلهـا الـعـامّ هـو $x^{2}+bx =c$ كما يلي:

*b/2*

*b/2*

 *A M B c*

$$x$$

E( II, 6)$ \rightarrow $ AC$ ×$ BC + (MB)2 = (MC)2

$\left(b+x\right)x+\left(\frac{b}{2}\right)^{2}= \left(\frac{b}{2}+x\right)^{2} ; BC=x و AC=b+x حيث $**ومنــه**$\left(\frac{b}{2}\right)^{2} +c= \left(\frac{b}{2}+x\right)^{2}$$ \rightarrow x= \sqrt{ \left(\frac{b}{2}\right)^{2} +c}-\frac{b}{2}$

وبـهــذا يتضح أن من مميـزات هـذه المدرسـة هو تجريد البراهين الجبرية عن الهندســة.

الـثـاني على مستوى الـمعـادلات: درس الـكـرجي معـادلات من الأنـواع التاليـة:

1 ) النوع $ ax^{2}+bx =c$ الذي شكله العام: $ax^{2n}+bx^{n} =c$

2 ) النوع $ax^{2}+c=bx $ الذي شكله العام: $ax^{2n}+c =bx^{n}$

3 ) النوع $bx+c =ax^{2}$ الذي شكله العام: $bx^{n} +c=ax^{2n}$

4 ) النوع $ ax^{3}+bx^{2} =c$ الذي شكله العام: $ ax^{2n+1}+bx^{2n} =c $

5 ) نوع أخـر هـو $ax^{2n+m}=bx^{n+m} +cx^{m}$ ،

( حيث $n$ و$m$ عـددان طبيعيان غير معـدومـين، و:$a>0$ و $b>0$ و $c>0$ )

4 ) قـام الكرجي بنشـر ثنائيـات الحــدود من قوى مختلفة مثلا: $\left(a+b\right)^{3}$ و $\left(a+b\right)^{4}$ وارتقى إلى أسـس أعـلــى $\left(a+b\right)^{n}=\sum\_{p=1}^{n}a^{n-p} b^{p} $ وأنشأ جدول ـمعاملات ذي الحـدين:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **شيئ** | **مـال** | **كـعـب** | **مال مـال** | **مــال كعب** | **كـعب كـعب** | **مال مال كعب** | **مال كعب كعب** | **كعب كعب كعب** | **مال مال كعب كعب** | **مال كعب** **كعب كعب** | **كعب كعب** **كعب كعب** |
| **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** |
|  | **1** | **3** | **6** | **10** | **15** | **21** | **28** | **36** | **45** | **55** | **66** |
|  |  | **1** | **4** | **10** | **20** | **35** | **56** | **84** | **120** | **165** | **220** |
|  |  |  | **1** | **5** | **15** | **35** | **70** | **126** | **210** | **330** | **495** |
|  |  |  |  | **1** | **6** | **21** | **56** | **126** | **252** | **462** | **792** |
|  |  |  |  |  | **1** | **7** | **28** | **84** | **210** | **462** | **924** |
|  |  |  |  |  |  | **1** | **8** | **36** | **120** | **330** | **792** |
|  |  |  |  |  |  |  | **1** | **9** | **45** | **165** | **495** |
|  |  |  |  |  |  |  |  | **1** | **10** | **55** | **220** |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | **1** | **11** | **66** |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | **1** | **12** |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | **1** |

وذلك عند معــالجـته لموضوع الحسـاب التوفيقي، بـل أعطى العلاقة $C\_{n}^{p}=C\_{n-1}^{p-1}+C\_{n-1}^{p}$ التي هـي، حسب بعض مؤرخي الرياضيات، لم تكن معروفة من قبله.

4 ) أعطى الكرجي طـريـقـة لكتابة كثيرات الحـدود باستعـمـال جـداول، مـثـلا لكتابة كثير الحدود:

مـال مـال كعب، وخمـسـة أمـوال كعب، وسـدس مال مال، وكعبين وثلاثة أشياء وخمس من العدد

استعمل الجدول التالي:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| الـتـرمـيـز /الحـدود | مال مال كعب | كعب كعب | مال كعب | مال مال | كعب | مــال | شـيئ | عــدد |
| العـربي الغباري | 1 | 0 | 5 | 0 | 2 |  | 3 | 5 |
| تـرمـيز الكرجي والسموأل |  |  | ۵ | ۰ | ۲ | ۱۶ | ٣ | ۵ |

مــلاحـظــتــان: 1 ) كتابة كثير حـدود في جدول هي مـيِّزة هـامة للمدرسة الثانية لأنها ستـمثـل بداية للترميز الجبري، عـلـمـا بأن: مجموعة الأرقـام العربية المشرقية هي:

 $\left\{٩ ، ٧ ، ٨ ، ٧ ، ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٣ ٢، ١، ، ٠ \right\}$

ومجمـوعـة الأرقـام العربية الفارسيـة هـي: $\left\{٩ ، ٧ ، ٨ ، ٧ ، ۶ ، ۵ ، ۴ ، ٣ ٢، ١، ٠، \right\}$

2 ) الكسور، عندهم، تكتب بدون خط فاصل بين البسط والمقام، البسط في سطر أعلى والمقام تحته. وكتابـة كسر بخط فاصل بين البسط والمقـام هو، حسب معلوماتنا اختراع من الغـرب الإسلامي، ظهـر لأول مرة في تاريخ الرياضيات، في كتاب الكـامل للـحـصار ( ت 1228م ).

5 ) تمكّــن الكرجـي ( لأول مرة في تاريخ الرياضيات ) من أعـطاء قـاعـدة لاستخـراج الجـذر التربيعي لكثيـر حـدود، تـعتـمـد على نشـر العبارة الـتـالـيـة:

$\left(A+B+C\right)^{2}$= $A^{2}+2AB+\left(B^{2}+2AC\right)+2BC+C^{2}$

حيث $A$ و $B$ و $C$ هي وحـيـدات حـد بأسـس مختلفـة، ومجموعها $A+B+C$ كثير حـدود.

مــثــلا لإيجـاد الجـذر التربيعـي لكثير الحـدود:

$$f\left(x\right)=x^{6}+4x^{5}+4x^{4}+6x^{3}+12x^{2}+9$$

اسـتـعـمـل الخـوارزمـيـة التـالـيـة:

1 ) أخذ الجذرين التربيعيين للطرفين فوجدهما: $x^{3}$ و 3 ومجموعهما $x^{3}+3$

 ( 2 قسم الحـد الثاني $4x^{5} $ على $x^{3}$ فوجد $4x^{2}$ ، وأيضا لو قسم $12x^{2}$ على 3 لوجـد $4x^{2}$ فالجـذر التربيعي لكثير الحـدود $f\left(x\right)$ هــو: $r\left(x\right)=x^{3}+4x^{2}+3$

مـثـال آخــر لإيجاـد الجذر التربيعي لكثير الحـدود:

 $f\left(x\right)=x^{8}+2x^{6}+11x^{4}+10x^{2}+25$

اسـتـعـمـل خـوارزمـيـة أخـرى هي التـالـيـة:

1 ) أخذ الجذرين التربيعيين للطرفين فوجدهما: $x^{4}$ و 5 وجـداؤهما $5 x^{4}$ ، وضعفه $10 x^{4}$

2 ) طرح ضعف جـداء الجذرين من الحـد الثالث وهو $11x^{4}$ فوجد $ x^{4}$ ،

3 ) أخـذ الجذر التربيعي لحاصل الطرح، فوجده $ x^{2}$ ،

4 ) جـمـع الجذر حاصل الطرح مع جـذري الطرفين فوجد المطلوب: $r\left(x\right)=x^{4}+x^{2}+5$

أشير إلى أننـا (بالطريقة المعاصرة) نوجد $r\left(x\right)$ بفرضه على الشكل:$ r\left(x\right)=αx^{3}+βx^{2}+γ$

ثم نربعه ونوجـد المعاملات بالمطابقة بين الطرفين، ولكن الكـرجي اخترع هـذه الكيفية التي استعملها رياضيو الإسـلام من بعـده.

نختم هـذا العـرض بـمـا يـلي:

المـهـم أن نبين إسهـام مـدرسـة الكرجي والسموأل في توسيع المفاهيم والعمليات الجبرية التي لم تكن معروفة من قبل، وإبراز أهم مميـزات هذه المدرسة، وهي:

1) تجريد البراهين الجبرية من الهنـدسـة

2) ممارسة وتقنين الحساب التوفيقي وإعـطـاء المثلث العـددي لمعاملات نشر $\left(a+b\right)^{n}$ ، وهـذا المثلث نسب "خطـأً" إلى باسكال، مع أن الـكـرجـي اكتشفه من قبل بحوالي خـمـسـة قرون، ولكنه الاستعمـار؛ كما أعـطــى الكرجي المسـاواة التوفيقية الهـامـة $C\_{n}^{p}=C\_{n-1}^{p-1}+C\_{n-1}^{p}$

3) توسيع فـكـرة الأسـس، وإعطاء القيمة 1 لـعــدد موجب ذي أُسٍّ مـعـدوم.

4) كتابة كـثـير حـدود في جـدول، وهي أيـضـا فـكـرة هـامة، قـد يكون رياضيوا الغرب الإسلامي اطلعـوا عليهـا، واستنبطـوا منهـا فـكـرة الترميز الجـبـري.