Mécanique

Abdelkader DELLAL
dellal@ens-kouba.dz

Table des matières

0.1 Coordonnées polaires

Soit M un point de coordonnées cartésiennes (x, y) et de coordonnées polaires(ρ, θ). Le changement de coordonnées s'écrit :

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

Nous pouvons déterminer les vecteurs de base $\boldsymbol{e}_\rho$ et $\boldsymbol{e}_\theta$ en différenciant le rayon vecteur $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM}$ exprimé dans la base cartésienne $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ en fonction des coordonnées polaires (ρ, θ) :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(x, y) &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{r}(\rho, \theta) &= \rho\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \rho\sin\theta\,\boldsymbol{j} \\ d\boldsymbol{r}(\rho, \theta) &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}\right)_\theta d\rho + \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\right)_\rho d\theta \\ &= (\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\,\boldsymbol{j})d\rho + \rho(-\sin\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j})d\theta \end{aligned}$$

Les vecteurs unitaires de la base polaire ont alors pour expression :

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_\rho = \cos\theta \boldsymbol{i} + \sin\theta \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{e}_\theta = -\sin\theta \boldsymbol{i} + \cos\theta \boldsymbol{j} \end{cases}$$

et l'on a :

$$d\boldsymbol{r}(\rho,\theta) = \boldsymbol{e}_\rho \, d\rho + \rho \boldsymbol{e}_\theta \, d\theta$$

0.1.1 Expression du vecteur position

Dans la base polaire $(\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\theta)$ et en coordonnées polaires (ρ, θ), le vecteur position s'écrit :

$$\boldsymbol{r} = \rho \boldsymbol{e}_\rho$$

0.1.2 Dérivée des vecteurs de base

Nous avons besoin de la dérivée des vecteurs de base pour exprimer la vitesse et l'accélération :

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{e}_\rho}{dt} = -\sin\theta \dfrac{d\theta}{dt} \boldsymbol{i} + \cos\theta \dfrac{d\theta}{dt} \boldsymbol{j} \\ \dfrac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt} = -\cos\theta \dfrac{d\theta}{dt} \boldsymbol{i} - \sin\theta \dfrac{d\theta}{dt} \boldsymbol{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{e}}_\rho = \dot{\theta} \boldsymbol{e}_\theta \\ \dot{\boldsymbol{e}}_\theta = -\dot{\theta} \boldsymbol{e}_\rho \end{cases}$$

0.1.3 Expression du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est la dérivée première du vecteur position par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\rho \boldsymbol{e}_\rho\right) \\ &= \dot{\rho} \boldsymbol{e}_\rho + \rho \dot{\boldsymbol{e}}_\rho \\ &= \dot{\rho} \boldsymbol{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \boldsymbol{e}_\theta \end{aligned}$$

0.1.4 Expression du vecteur accélération

Le vecteur accélération est la dérivée première du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta\right) \\
&= \ddot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\boldsymbol{e}}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \rho\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \rho\dot{\theta}\dot{\boldsymbol{e}}_\theta \\
&= \ddot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\rho}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \rho\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta - \rho\dot{\theta}^2\boldsymbol{e}_\rho \\
&= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\boldsymbol{e}_\theta
\end{aligned}$$

0.2 Conversion entre système polaire et cartésien

Les deux coordonnées polaires r et θ peuvent être converties en coordonnées cartésiennes x et y en utilisant les fonctions trigonométriques :

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Les deux coordonnées cartésiennes x et y permettent de calculer la première coordonnée polaire r par :

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Pour déterminer la seconde (l'angle θ), on doit distinguer deux cas :

- pour $r = 0$, l'angle peut prendre n'importe quelle valeur réelle ;

- pour $r \neq 0$, pour obtenir une unique valeur de θ, on se restreint à l'intervalle $[0, 2\pi[$ (ou de manière équivalente $]-\pi, \pi]$).

  Pour obtenir θ dans l'intervalle On utilise généralement arctan la réciproque de la fonction tangente

0.3 Quelques courbes classiques en coordonnées polaires

- **Droite** :
  Une droite radiale (qui passe par le pôle) est représentée par l'équation :

$$\theta = \varphi$$

où φ, constant, correspond à l'angle de la droite.

- **Cercle** :
pour un cercle centré sur le pôle et de rayon a :

$$r(\theta) = a$$

- **Conique** :

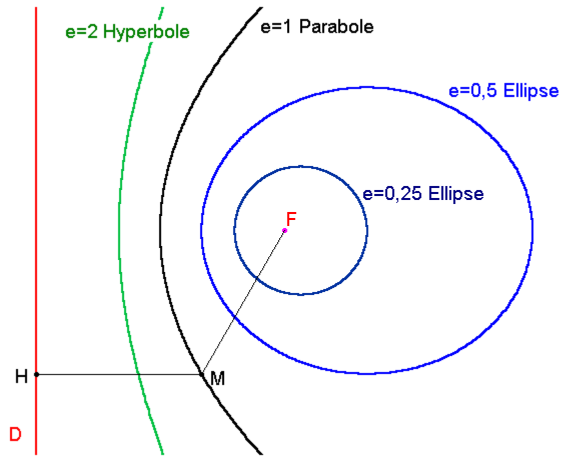
$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)}.$$

Le paramètre e définit la forme de la conique :

– Si $e < 1$, on obtient une courbe fermée et bornée (ellipse).

– Si $e = 1$, on obtient une courbe ouverte et infinie (parabole).

– Si $e > 1$ on obtient une courbe possédant deux branches symétriques par rapport au point d'intersection de leurs asymptotes communes (hyperbole).



0.4 Rappel :Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

0.4.1 Définition

Une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, est une équation de la forme

$$ay'' + by' + cy = g(x) \tag{E}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et g est une fonction continue sur un intervalle ouvert I.
L'équation

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{E_0}$$

est appelée l'équation homogène associée à (E).

0.4.2 Équation homogène

On cherche une solution de (E_0) sous la forme $y(x) = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{C}$ est une constante à déterminer. On trouve

$$\begin{aligned} & ay'' + by' + cy = 0 \\ \iff & (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \\ \iff & ar^2 + br + c = 0. \end{aligned}$$

Définition 3.
L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée *l'équation caractéristique* associée à (E_0).

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation caractéristique associée à (E_0).

Théorème 5.

1. *Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et les solutions de (E_0) sont les*

$$\boxed{y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

2. *Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double r_0 et les solutions de (E_0) sont les*

$$\boxed{y(x) = (\lambda + \mu x)e^{r_0 x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

3. *Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ et les solutions de (E_0) sont les*

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x}\big(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)\big) \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$