الميكانيك

الأستـاذ: دلال عبد القادر

dellal@ens-kouba.dz

الفهـــــــــرس

1 دراسة حركة نقطة مادية على منحنى **2**

1 طول القوس و مشتقه 2

2 الانحناء 5

3 حساب الإنحناء 7

4 إشتقاق الأشعة -الدوال الشعاعية 10

5 المشتق الأول و الثاني لشعاع بالنسبة لطول القوس 10

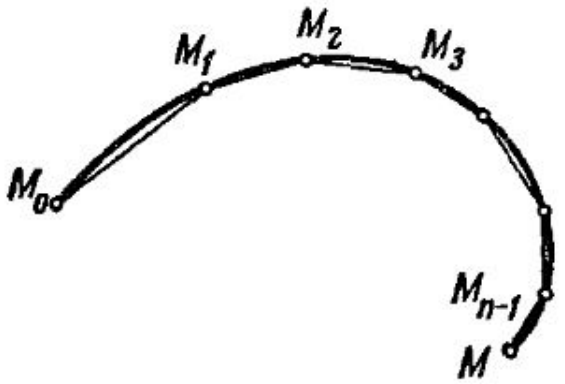
6 دراسة سرعة و تسارع نقطة مادية في حركة منحنية 18

الفصل الأول

دراسة حركة نقطة مادية على منحنى

1 طول القوس و مشتقه

نفترض ان قوس المنحنى M_0M (1.1 الشكل) هو الرسم البياني للدالة $y = f(x)$ المعرفة في المجال (a, b).) نعرف طول قوس المنحنى. نعين على المنحنى AB النقاط $M_0, M_1, M_2, \dots M_{i-1}, M_i \dots M_{n-1}, M_n$. ربط هذه النقاط بقطع مستقيمة يمنحنا مضلع $M_0M_1M_2 \dots M_{i-1}M_i \dots M_{n-1}M_n$ حيث القوس M_0M. مدرج فيه.



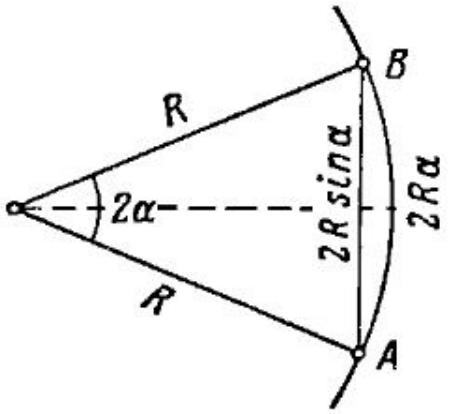
شكل 1.1

نسمي P_n طول هذا المضلع. نسمي طول القوس M_0M (و نرمز له بـ s) النهاية التي يؤول اليها طول هذا المضلع عندما يؤول طول الجزء الأكبر من القطعة $M_{i-1}M_i$ الى الصفر, اذا كانت النهاية موجودة ولا ترتبط باختيار رؤوس المضلع $M_0M_1M_2 \dots M_{i-1}M_i \dots M_{n-1}M_n$. ننبه أن هذا التعريف لطول قوس منحنى هو طول المحيط.

سنبين لاحقا أنه اذا كانت الدالة $f(x)$ ومشتقتها $f'(x)$ مستمرة في المجال $[a, b]$، فان قوس المنحنى $y = f(x)$، بين النقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$، لديه طول محدد يمكن حسابه بصيغة معينة. في ظل

الشروط المذكورة أعلاه سنبين ان نسبة طول القوس على طول الوتر المقابل يؤول نحو الواحد، عندما يؤول طول الوتر المقابل الى الصفر، وهذا يعني ان $\lim_{M_0M\to 0} \frac{\text{طول}\widehat{M_0M}}{\text{طول}\overline{M_0M}} = 1$. يمكننا إثبات هذه العلاقة [1] بسهولة سوف نتقبل في هذه المرحلة الحالة العامة دون برهان.

ليكن $y = f(x)$ معادلة منحنى في المستوي Oxy. ليكن $M_0(x_0, y_0)$ نقطة معطاة من هذا المنحنى و $M(x, y)$ نقطة كيفية من المنحنى. نرمز بـ s لطول (انضر شكل 3.1) القوس M_0M



شكل 2.1

عندما تتغير الفاصلة x للنقطة M فان طول القوس s يتغير ايضا و بالتالي فهو دالة لـx سنحسب مشتق s بالنسبة لـ x. نعطي لـ x تزيادا قدره Δx يتعرض القوس s لتزياد قدره $\Delta s = \text{طول}\widehat{MM_1}$. ليكن $\overline{M_0M}$ الوتر الذي تحت القوس. لإيجاد النهاية $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}$ نتبع الطريقة التالية:

نحصل من المثلث MM_1Q على $\overline{MM_1}^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$.
بضرب و تقسيم الطرف الأول بـ Δx^2 :

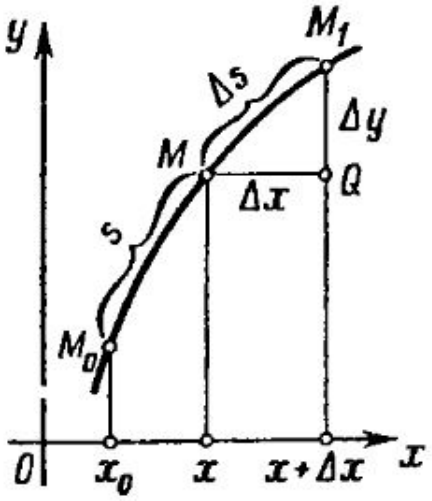
$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}\right)^2 \cdot \Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

بتقسيم طرفي المساواة على Δx^2 :

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

بالمرور الى النهاية في كلا الطرفين لما $\Delta x \to 0$. لدينا $\lim_{M_0M\to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta s} = 1$ أي $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, ومنه:

[1] نعتبر القوس AB ذو الزاوية 2α (الشكل2.1) طول هذا القوس يساوي $2R\alpha$ (حيث R هو نصف قطر الدائرة)؛ طول الوتر المقابل هو $2R\sin\alpha$ و لدينا: $\lim_{\alpha\to 0} \frac{\widehat{AB}}{\overline{AB}} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{2R\alpha}{2R\sin\alpha} = 1$



شكل 1.3

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

أي

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \qquad (1.1)$$

نجد الصيغة التالية لتفاضل القوس:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \qquad (2.1)$$

أي

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \qquad (3.1)$$

وجدنا الصيغة[2] لطول القوس لمنحنى معادلته $y = f(x)$. و تبقى الصيغة (3.1) صحيحة في حالة تمثيل المنحنى بواسطة معادلات وسيطية.

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

حيث

$$dx = \varphi'(t)dt, \quad dy = \psi'(t)dt,$$

[2] الصيغة 1.3 صحيحة فقط اذا كان $dx > 0$. اذا كان $dx < 0$ فان $ds = -\sqrt{dx^2 + dy^2}$. لهذا السبب من الأكثر دقة أن نكتب في الحالة العامة: $|ds| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

و تصبح الصيغة (3.1) على الشكل التالي:

$$ds = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}dt.$$

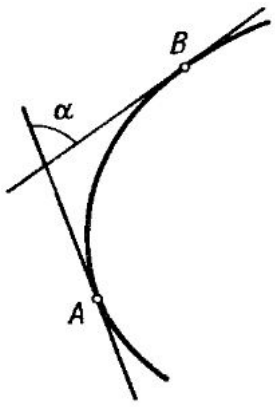
2 الانحناء

احدى العناصر المميزة لشكل منحنى هو درجة انحناء التقوس, لنأخذ ونعتبر منحنى ليس له نقاط مضاعفة و لديه مماس محدد في كل نقطة . نأخذ المماسات للمنحنى في نقطتين A B ونعين α الزاوية التي تشكلها هذه المماسات، أو بشكل أكثر دقة, α هي زاوية دوران المماس عندما ننتقل من النقطة A الى النقطة B.(الشكل 4.1). نسمي هذه الزاوية بزاوية الإنفراج للقوس AB. قوسين من نفس الطول، الأكثر تقوسا هو الذي تكون زاوية انفراجه هي الأكبر (الشكل 6.1 والشكل 4.1). بالطبع لا يمكن تمييز درجة الانحناء للأقواس باطوال مختلفة بالاعتماد فقط على زاوية الإنفراج. وبالتالي، التمييز الصحيح لانحناء المنحنى يكون بحساب نسبة زاوية الإنفراج على طول القوس المقابل.

تعريف 2.1. نسمي متوسط انحناء K_m للقوس $\widehat{AB}$ النسبة لزاوية الانفراج α على طول القوس المقابل:

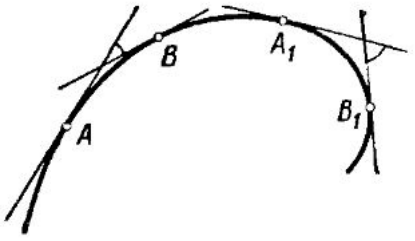
$$K_m = \frac{\alpha}{\widehat{AB}}$$

.



شكل 4.1

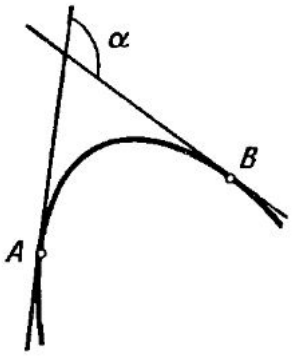
متوسط الإنحناء للأقواس مختلفة يمكن أن يختلف بحسب القوس المختار، وبالتالي فإن متوسط إنحناء القوسين $\widehat{AB}$ و $\widehat{A_1B_1}$ من المنحنى المبين في الشكل 5.1 ليست متساوية، على الرغم من أن هذه الأقواس متساوية الطول. بالإضافة الى ذلك تختلف درجة انحناء من جزء الى أخر من منحنى . ولهذا و من أجل تحديد درجة إنحناء المنحنى في الجوار المحلي لنقطة معينة A ، سندرس مفهوم الإنحناء في كل نقطة .



شكل 5.1

تعريف 2.2. يسمى إنحناء منحنى عند نقطة A ونرمز الى K_A النهاية التي يؤول نحوها متوسط إنحناء القوس $\widehat{AB}$ عندما يؤول طول هذا القوس الى الصفر (أي عندما B تلاصق النقطة A) [3]

$$K_A = \lim_{B \to A} K_m = \lim_{AB \to 0} \frac{\alpha}{\widehat{AB}}$$



شكل 6.1

مثال 2.1. الدئرة:
نعتبر نصف قطرها r :

1. حساب الإنحناء المتوسط للقوس $\widehat{AB}$ المرفق للزاوية في المركز (الشكل7.1)
2. حساب الإنحناء عند النقطة A.

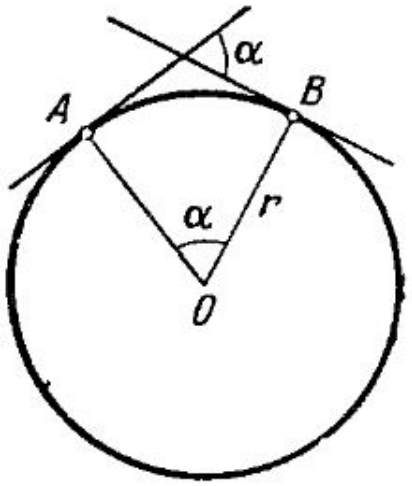
من الواضح أن زاوية انفراج القوس $\widehat{AB}$ تساوي α وطول هذا القوس يساوي αr. لذلك،

$$K_m = \frac{\alpha}{\alpha r} = \frac{1}{r}$$

الإنحناء عند النقطة A يساوي

$$K = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\alpha r} = \frac{1}{r}$$

[3] نفترض أن قيمة النهاية مستقلة عن اختيار النقطة المتغيرة B (A يسار أو يمين النقطة)



شكل 7.1

وبالتالي، فإن متوسط انحناء قوس دائرة نصف قطرها R غير مرتبط بموضع وطول هذا القوس، انه متساوي لجميع الأقواس بـ $\frac{1}{R}$. وبالمثل فإن إنحناء الدائرة في نقطة معينة غير مرتبط بموضع هذه النقطة و يساوي ايضا $\frac{1}{R}$.

ملاحظة 2.1. نلاحظ أنه بالنسبة لمنحنى كيفي، الإنحناء قد يختلف من نقطة الى أخرى. هذا ما سنراه لاحقا.

3 حساب الإنحناء

سنضع صيغة تسمح لنا بحساب الإنحناء عند كل نقطة $M(x,y)$ من المنحنى. لنفرض أن المنحنى في الإحداثيات الديكارتية يمثل كما يلي

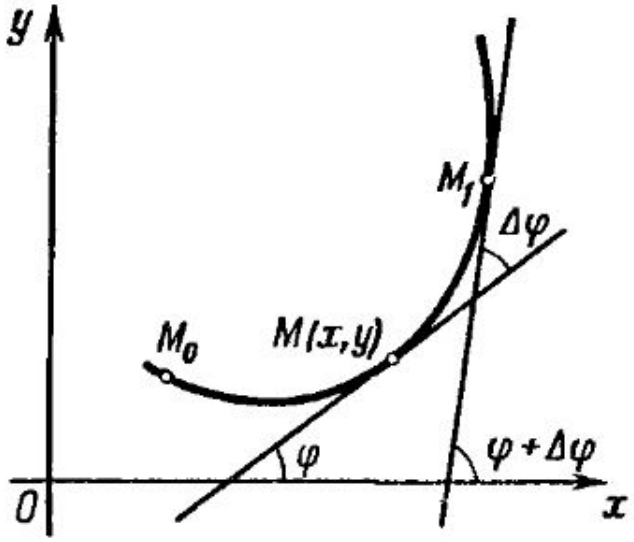
$$y = f(x) \tag{4.1}$$

وأن للدالة $f(x)$ مشتقة ثانية مستمرة. نرسم المماسات للمنحنى عند النقطتين M وM_1 فواصلهما على التوالي x و$x + \Delta x$ ونعين بواسطة φ و$\varphi + \Delta\varphi$ الزوايا التي تشكلها هذه المماسات مع محور الفواصل Ox (انضر الشكل 8.1)

نرمز بـ s لطول القوس $\widehat{M_0M}$ إنطلاقا من نقطة معطاة M_0 إذن $\Delta s = \widehat{M_0M_1} - \widehat{M_0M}$ و $|\Delta s| = \widehat{MM_1}$. نلاحظ من الشكل 8.1 أن زاوية الإنفراج المرفقة للقوس $\widehat{MM_1}$ يساوي القيمة المطلقة للفرق بين الزاويتين φ و $\varphi+\Delta\varphi$، أي أنها تساوي $|\Delta\varphi|$. بفضل تعريف متوسط الإنحناء،لدينا القوس $\widehat{MM_1}$:

$$K_m = \frac{|\Delta\varphi|}{|\Delta s|} = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

[4] من الواضح أنه بالنسبة للمنحنى في الشكل 8.1 $|\Delta\varphi| = \Delta\varphi$ لأن $\Delta\varphi > 0$



شكل 8.1

لحساب الإنحناء عند النقطة M, يجب علينا إيجاد نهاية هذه العبارة عندما يكون طول القوس $\widehat{MM_1}$ يؤول الى الصفر

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right|.$$

بما ان φ و s هي بدلالة x (دوال لـx)، نعتبر φ كدالة لـ s ونعتبر أن هذه الدالة تكتب بواسطة معادلات وسيطية للمتغير x. و منه

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}$$

$$K = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|. \qquad (5.1)$$

لحساب $\frac{d\varphi}{ds}$ نستخدم صيغة اشتقاق الدوال الوسيطية:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}}$$

للتعبير عن $\frac{d\varphi}{dx}$ باستخدام الدالة $y = f(x)$, نلاحظ أن $\tan\varphi = \frac{dy}{dx}$ وبالتالي:

$$\varphi = \arctan \frac{dy}{dx}$$

نشتق هذه المساواة بالنسبة لـ x :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

بخصوص مشتق $\frac{ds}{dx}$, لدينا من المعادلة 1.1

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

و منه

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+(dydx)^2\right)^{3/2}}$$

بماأن $K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$, لدينا :

$$K = \frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}. \qquad (6.1)$$

نتيجة لذلك، في أي نقطة من المنحنى حيث المشتقة الثانية $\frac{d^2y}{dx^2}$ موجودة و مستمرة، يمكننا حساب الإنحناء بواسطة الصيغة (6.1)، نشير الى ان الإنحناء هو بالتعريف كم غير سالب.

مثال 3.1. عين انحناء القطع المكافئ $y^2 = 2px$

1. عند نقطة كيفية $M(x,y)$;
2. عند النقطة $M_1(0,0)$,
3. عند النقطة $M_1(\frac{p}{2},p)$.

الحل 3.1. نقوم بحساب المشتقات الاولى و الثانية للدالة : $\sqrt{2px}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}}$. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p^2}{(2px)^{3/2}}$ بادراج هذه العبارات في الصيغة (6.1). نجد:

1. $K = \frac{p^2}{(2px+p^2)^{3/2}}$
2. $(K)_{x=0} = \frac{1}{p}$;
3. $(K)_{x=\frac{p}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2p}}$.

مثال 3.2. عين الإنحناء للمستقيم $y = ax + b$ عند نقطة كيفية $M(x,y)$.

الحل 3.2. $y' = a$, $y'' = 0$. باستعمال الصيغة (6.1) لدينا $K = 0$ اذن المستقيم هو منحنى ذو الانحناء المعدوم. هذه النتيجة يمكن ان نجدها بسهولة من خلال تعريف الانحناء.

4 إشتقاق الأشعة -الدوال الشعاعية

نعرف مشتق شعاع: $\vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \chi(t)\vec{k}$ بالعلاقة:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \varphi'(t)\vec{i} + \psi'(t)\vec{j} + \chi'(t)\vec{k}$$

ينتج مباشرة من هذا التعريف أن القواعد الرئيسية لإشتقاق الدوال هي أيضا صالحة من أجل كل الأشعة.

1- مشتق مجموع من الأشعة يساوي مجموع مشتقات هذه الأشعة.

2- مشتق الجداء السلمي لشعاعين يعطى بالصيغة:

$$\frac{d(\vec{r_1}\vec{r_2})}{dt} = \frac{d\vec{r_1}}{dt}\vec{r_2} + \vec{r_1}\frac{d\vec{r_2}}{dt}$$

لازمة 4.1. مشتق شعاع الوحدة e (أي $1 = |e|$) عمودي على هذا الشعاع.

برهان. إذا كان e هو شعاع وحدة، فان $ee = 1.$

باشتقاق طرفي هذه المعادلة بالنسبة للزمن t نجد: $\frac{de}{dt}e + \frac{de}{dt}e = 0$

منه $2\frac{de}{dt}e = 0$

إذن الجداء السلمي $\frac{de}{dt}e = 0$

هذا يعني بالتحديد أن الشعاع $\frac{de}{dt}$ عمودي على الشعاع e.

□

3- إذا كانت $f(t)$ هي دالة سلمية و $\vec{r}(t)$ هي دالة شعاعية، فإن مشتق الجداء $f(t)\cdot\vec{r}(t)$ يعطى بالعلاقة:

$$\frac{d(f\vec{r})}{dt} = \frac{df}{dt}\vec{r} + f\frac{d\vec{r}}{dt}.$$

4- يمكننا إخراج العدد الثابت من داخل المشتق.

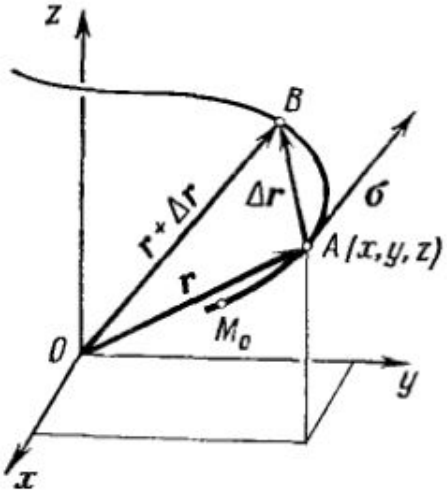
$$\frac{d(a.\vec{r})}{dt} = a\frac{d\vec{r}}{dt}.$$

5- مشتق الجداء الشعاعي لـ $\vec{r}_1(t)$ و $\vec{r}_2(t)$ معطى بالصيغة:

$$\frac{d(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{r}_2}{dt}.$$

5 المشتق الأول و الثاني لشعاع بالنسبة لطول القوس

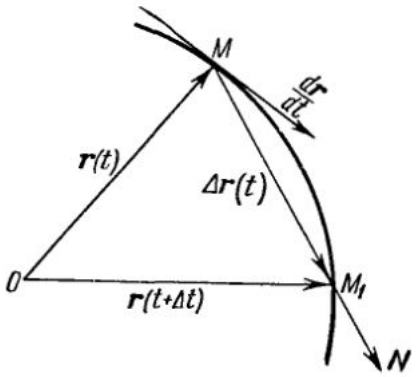
- إنحناء المنحنى- الناظم الرئيسي



شكل 9.1

طول القوس لمنحنى ثنائي الانحناء (منحنى في $\mathbb{R}^3$) $\widehat{M_0A} = s$ يعرف بنفس الكيفية بالنسبة لمنحنى في المستوي (مسطح أي في $\mathbb{R}^2$) " انضر الشكل 10.1 ". طول القوس s يتغير عندما تتحرك النقطة $A(x,y,z)$ على المنحنى. و كذلك بالمثل عندما يتغير s فإن إحداثيات النقطة $A(x,y,z)$ تتغير أيضا. كنتيجة لذلك يمكن إعتبار الأحداثيات x,y,z للنقطة المتغيرة A على المنحنى كدوال بدلالة طول القوس s:

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \chi(s).$$



شكل 10.1

في هذه المعادلات الوسيطية، الوسيط هو طول القوس s.
الشعاع $\overrightarrow{OA} = s$ يعبر عنه كمايلي:

$$\vec{r}(s) = \varphi(s)\vec{i} + \psi(s)\vec{j} + \chi(s)\vec{k}$$

أي

$$\vec{r} = \vec{r}(s)$$

معناه أن الشعاع $\vec{r}$ هو دالة لطول القوس s. نوضح المعنى الهندسي للمشتق $\frac{d\vec{r}}{ds}$.
نستنتج من الشكل 9.1 المساويات التالية:

$$\widehat{M_0A} = s, \quad \widehat{AB} = \Delta s, \quad \widehat{M_0B} = s + \Delta s$$

$$\overline{OA} = \vec{r}(s), \quad \overline{OB} = \vec{r}(s + \Delta s),$$

$$\overline{AB} = \Delta\vec{r} = \vec{r}(s + \Delta s) - \vec{r}(s),$$

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \frac{\overline{AB}}{\widehat{AB}}$$

.
لدينا الشعاع $\lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ موجه وفقا لمماس المنحنى عند النقطة A في إتجاه تزايد s.
من جهة أخرى، لدينا المساواة:
$\lim \left|\frac{\overline{AB}}{\widehat{B}}\right| = 1$.(نهاية طول الوتر بالنسبة إلى طول القوس المقابل له) ينتج أن $\frac{d\vec{r}}{ds}$ هو شعاع وحدة موجه وفقا للمماس، نرمز له بـ $\vec{\sigma}$ حيث:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\sigma}. \tag{7.1}$$

إذا كان الشعاع $\vec{r}$ معرف كما يلي: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
إذن

$$\vec{\sigma} = \frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j} + \frac{dz}{ds}\vec{k}$$

بحيث:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1$$

لتكن $\frac{d^2r}{ds^2}$ المشتقة الثانية للدالة الشعاعية $\vec{r}$، أي مشتقة $\frac{d\vec{r}}{ds}$ و نعطي المعنى الهندسي له.
ينتج عن الصيغة (7.1)

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \frac{d\vec{\sigma}}{ds}$$

وبالتالي علينا حساب $\lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta\vec{\sigma}}{\Delta s}$.

انطلاقا من الرسم 11.1 : $\overline{BK} = \vec{\sigma} + \Delta\vec{\sigma}$, $\overline{AL} = \vec{\sigma}$, $AB = \Delta s$ إلى النقطةنكتب الشعاع $\overline{BL_1} = \vec{\sigma}$. من المثلث BKL_1 لدينا :

$$\overline{BK} = \overline{BL_1} + \overline{L_1K}$$

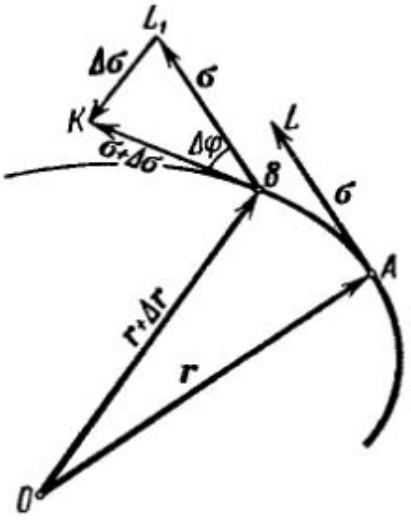
حيث:

$$\vec{\sigma} + \Delta\vec{\sigma} = \vec{\sigma} + \overline{L_1K}$$

.

و منه: $\overline{L_1K} = \Delta\vec{\sigma}$. بما أن طول الشعاع $\vec{\sigma}$ ثابت. $|\vec{\sigma}| = |\vec{\sigma} + \Delta\vec{\sigma}|$

ينتج أن المثلث BKL_1 متساوي الساقين. الزاوية $\Delta\varphi$ لرأس المثلث هي زاوية دوران لمماس المنحنى عندما ننتقل من النقطة A إلى النقطة B. حيث تتناسب مع التزياد في طول القوس Δs.



شكل 11.1

من المثلث لدينا BKL_1:

$$L_1K = |\Delta\vec{\sigma}| = 2|\vec{\sigma}|\left|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right| = 2\sin\left|\frac{\Delta\varphi}{2}\right|$$

حيث $|\vec{\sigma}| = 1$. نقسم طرفي هذه المعادلة على Δs

نجد:

$$\left|\frac{\Delta\vec{\sigma}}{\Delta s}\right| = 2\left|\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right|\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$$

.

بالمرور إلى النهاية لما Δs يؤول نحو 0 في طرف الأيسر للمعادلة نجد :

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\sigma}}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\vec{\sigma}}{ds}\right|.$$

و زيادة على ذلك :

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right| = 1$$

نحن نعتبر المنحنيات ذات النهاية $\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ موجودة، و منه $\Delta\varphi\to 0$ لما $\Delta s\to 0$ وبالمرور إلى النهاية لدينا:

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\vec{\sigma}}{ds}\right|. \tag{8.1}$$

نسمي متوسط إنحناء القوس AB للمنحنى , طويلة النسبة لزاوية دوران المماس $\Delta\varphi$ عندما ننتقل من النقطة A إلى النقطة B على الطول Δs للقوس AB أي:

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| = \text{متوسط الإنحناء}$$

نهاية متوسط الإنحناء لما $\Delta s\to 0$ تسمى إنحاء المنحنى عند النقطة A، و نرمز لها بـ K :

$$K = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$$

و لدينا من المعادلة (8.1): $\left|\frac{d\vec{\sigma}}{ds}\right| = K$
بمعنى طويلة مشتق شعاع الوحدة [5] للمماس بالنسبة لطول القوس تساوي إنحناء المنحنى عند هذه النقطة. الشعاع $\vec{\sigma}$ هو شعاع وحدة للمماس مشتقه عمودي عليه $\frac{d\vec{\sigma}}{ds}$ (أنظر اللازمة 4.1). و بالتالي الشعاع $\frac{d\vec{\sigma}}{ds}$ يوجه على الحامل العمودي لشعاع المماس، طولته تساوي الإنحناء عند هذه النقطة.

تعريف 5.1. نسمي ناظم رئيسي للمنحنى عند نقطة معينة المستقيم الذي هو على حامل الشعاع $\frac{d\vec{\sigma}}{ds}$. نرمز بـ $\vec{n}$ شعاع الوحدة الموجه .

طويلة الشعاع $\frac{d\vec{\sigma}}{ds}$ تساوي الإنحناء K للمنحنى و بالتالي:

$$\frac{d\vec{\sigma}}{ds} = K\vec{n}$$

نسمى الكم $\frac{1}{K}$ بنصف قطر إنحناء للمنحنى عند نقطة معينة، و نرمز له بـ R، أي $R = \frac{1}{K}$. و منه نكتب:

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}. \tag{9.1}$$

[5] للتذكر مشتق شعاع هو أيضا شعاع. بتالي يمكننا حساب طويلة هذه المشتق.

ينتج عن هذه العلاقة:

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)^2. \tag{10.1}$$

حيث :

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d^2x}{ds^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{ds^2}\vec{k}$$

و بالتالي:

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}. \tag{11.1}$$

العلاقة 11.1 تسمح لنا بحساب الإنحناء عند أي نقطة من المنحنى بتلك المعادلات الوسيطية، حيث الوسيط هو طول القوس s (أي عندما يكون شعاع الموضع للنقطة المتغيرة على المنحنى هو تابع بدلالة طول القوس).

لندرس الحالة حيث يكون شعاع الموضع $\vec{r}$ بدلالة وسيط كيفي t :

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

في هذه الحالة نعتبر s كدالة للوسيط t، و يتم حساب الإنحناء على النحو التالي:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}. \tag{12.1}$$

و بما أن [6]

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$$

إذن

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \tag{13.1}$$

نشتق طرفي هذه المعادلة و بالإختزال على 2 نحصل على:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}. \tag{14.1}$$

[6] هذه المساواة ناتجة كون $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta s}$. حيث Δr هو الوتر تحت القوس ذو الطويلة Δs. لذلك $\frac{\Delta r}{\Delta s}$ يؤول نحو 1 لما Δs يؤول نحو 0.

ينتج عن العلاقة 12.1 أن:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{1}{\frac{ds}{dt}}$$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة لـ s نجد:

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} - \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}$$

و بتعويض عبارة $\frac{d^2r}{ds^2}$ المتحصل عليها في العبارة (10.1) نجد:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R^2} &= \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} - \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}\right)^2 \\ &= \frac{\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - 2\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^6}.\end{aligned}$$

بالتعبير عن $\frac{d^2s}{dt^2}$ و $\frac{ds}{dt}$ من خلال الصيغ (11.1) و 14.1 بدلالة مشتقات $r(t)$ نجد: [7]

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2}{\left(\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right)^3} \tag{15.1}$$

يمكن صياغة العبارة (14.1) على الشكل [8]:

$$K^2 = \frac{1}{R^2} = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2}{\left(\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right)^3}. \tag{16.1}$$

انشائنا صيغة تسمح بحساب الإنحناء في أي نقطة معطاة من المنحنى بمعادلاتها وسيطية ذات وسيط كيفي.
بصفة خاصة، إذا كان المنحنى مسطح و يقع في المستوي Oxy فله المعادلات الوسيطية:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = 0$$

[7] نقوم بتحويل المقام على النحو التالي: $\left(\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right)^3 = \left(\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right)^3 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^6$. لا نستطيع كتابة $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^6$ لأن $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2$ هو مربع السلمي للشعاع $\frac{d\vec{r}}{dt}$ و $\left(\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right)^3$ هو مكعب العدد $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2$. العبارة $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^6$ ليس لها أي معنى.

[8] لقد إستعملنا المساواة $a^2b^2 - (ab)^2 = (a \times b)^2$ و يمكن التحقق منها بسهولة بوضعها على الشكل التالي:

$$a^2b^2 - (ab\cos\phi)^2 = (ab\sin\phi)^2$$

لنعوض عبارات x, y, z التالية في الصيغة 16.1 فنتحصل على الصيغة التي لإنحناء المنحنى مسطح بمعادلات وسيطية .

$$K = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)|}{((\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2)^{3/2}}$$

مثال 5.1. حساب الإنحناء للولب .(l'hélice)

$$\vec{r} = \vec{i}a\cos t + \vec{j}a\sin t + \vec{k}amt$$

في أي نقطة كيفية.

الحل 5.1.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{i}a\sin t + \vec{j}a\cos t + \vec{k}am,$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{i}a\cos t - \vec{j}a\sin t,$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & am \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}a^2 m\sin t - \vec{j}a^2 m\cos t + \vec{k}a^2$$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2 = a^4(m^2+1),$$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + a^2m^2 = a^2(1+m^2)$$

$$\frac{1}{R^2} = \frac{a^4(m^2+1)}{(a^2(1+m^2))^3} = \frac{1}{a^2(1+m^2)^2}$$

حيث:

$$R = a(1+m^2) = \text{ثابت}$$

نستنتج إذن أن نصف قطر إنحناء ثابت بالنسبة للولب (l'hélice) .

ملاحظة 5.1. يمكننا دوما أن نفترض أن المنحنى مسطح يقع في المستوي Oxy. (يكفي فقط تغيير محاور الإحداثيات) في المستوي Oxy لدينا $z = 0$. إذن $\frac{d^2z}{ds^2} = 0$، و عليه الشعاع $\vec{\ }$ يقع أيضا في المستوي Oxy.
نستخلص أن الناظم الرئيسي للمنحنى المسطع يقع في نفس المستوي للمنحنى.

6 دراسة سرعة و تسارع نقطة مادية في حركة منحنية

لنفرض أنه في اللحظة الزمنية t، تكون النقطة المتحركة عند النقطة M المعينة بالشعاع الموجه $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$ " الشكل 1.11 " و أنه في اللحظة $t+\Delta t$ تكون في النقطة M_1 المحددة بالشعاع الموجه $\overrightarrow{OM_1} = \vec{r}(t+\Delta t)$ عندئذ الشعاع $\overrightarrow{MM_1}$ يسمى شعاع إنتقال النقطة.
حاصل قسمة شعاع الإنتقال $\overrightarrow{MM_1}$ على التغير في الزمن Δt يسمى شعاع السرعة المتوسطة للنقطة خلال هذه الفترة الزمنية.

$$\vec{V}_{\text{متوسط}} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \overrightarrow{MN}$$

.
شعاع السرعة المتوسطة يكون متجه نحو الوتر $\overline{MM_1}$ في نفس اتجاه حركة النقطة (خلال حركة مستقيمة يتم توجيهه وفقا للمسار نفسه). سرعة النقطة خلال زمن معين معرفة بالعلاقة:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} (\vec{v}_{\text{متوسط}}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

بعبارة أخرى:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (17.1)$$

نستطيع القول أن سرعة نقطة عند لحظة زمنية معطاة هو المشتق الأول لشعاع إنتقال النقطة بالنسبة للزمن.
إسقاطات السرعة على محاور الإحداثيات هي:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

طويلة السرعة هي:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \qquad (18.1)$$

إذا قدمنا طول القوس s و اعتبرنا طول القوس كدالة للزمن t. إذن يمكن كتابة الصيغة 17.1 كمايلي:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{\sigma} v \qquad (19.1)$$

حيث: $v = \frac{ds}{dt}$ هي القيمة المطلقة للسرعة.

لدينا الشعاع $\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$ موجه وفقا لمماس المنحنى عند النقطة A في إتجاه زيادة s.
من جهة أخرى، لدينا المساواة $\lim \left|\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}\right| = 1$ (نهاية التغير في طول الوتر بالنسبة إلى طول القوس المقابل).
و كنيجة لذلك، $(\vec{\sigma} = \frac{d\vec{r}}{ds})$ هو شعاع وحدة موجه وفقا للمماس في نفس إتجاه الحركة.
نسمي تارع w لنقطة في حالة حركة منحنية مشتق شعاع السرعة بالنسبة للزمن

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{20.1}$$

و بما أن: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
فينتج أن:

$$\vec{w} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{21.1}$$

و إذا ركزنا على الصيغة 19.1 نحصل على:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{\sigma})}{dt}$$

و بحساب هذا الأخير نجد:

$$\vec{w} = \frac{dv}{dt}\vec{\sigma} + v\frac{d\vec{\sigma}}{dt}. \tag{22.1}$$

لنحول المشتق $\frac{d\vec{\sigma}}{dt}$ باستعمال الصيغتين 12.1 و 9.1:

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{\vec{n}}{R}v$$

نعوضها في المعادلة 22.1 نحصل في النهاية على:

$$\vec{w} = \frac{dv}{dt}\vec{\sigma} + v^2\frac{\vec{n}}{R} \tag{23.1}$$

هنا $\vec{\sigma}$ يدل على شعاع وحدة موجه وفقا للمماس في نفس إتجاه الحركة.
$\vec{n}$ هو شعاع وحدة وحدة موجه وفقا للناظم الرئيسي.
الصيغة 23.1 يمكن التصريح بها كذلك. إسقاط تسارع النقطة على المماس يساوي المشتق الأول للسرعة بالقيمة المطلقة و إسقاط التسارع على الناظم الرئيسي يساوي مربع السرعة مقسوم على نصف قطر إنحناء المسار في النقطة المعتبرة. و بما أن الأشعة $\vec{\sigma}$ و $\vec{n}$ متعامدة، فإن طويلة التسارع تعرف بالصيغة:

$$w = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \tag{24.1}$$

مثال 6.1. تطبيق:

$$f(x) = \sinh x$$

حساب R, s, $\vec{\sigma}$ et $\vec{n}$