تمرين 1: [6ن]

1) **"تزاوج التعليمية بين التفكير والممارسة". اشرح هذا القول باختصار.**

[0.75 x 3] - التفكير في الأقطاب الثلاث: النفسي، المعرفي، التربوي (أنظر كراس الدروس).

[0.75] - الممارسة: استغلال المعلّم أفكار حقل تعليمية الرياضيات في تذليل ما يواجهه من صعوبات في مزاولة مهنته.

أذكر أصناف الحواجز في تعليم الرياضيات مع تقديم مثال عن كل صنف.

• [1] حواجز تعليمية: تنتج عن الاختيارات البيداغوجية للمعلّم.

[0.5] مثال: اعتبار الأعداد الطبيعية غير عشرية نتيجة تعريف العدد العشري كعددين طبيعيين بينهما فاصلة.

• [1] حواجز ابستمولوجية: ناجمة عن الطبيعة المتقطّعة التي يتصف بها تكوّن المفاهيم الرياضياتية.

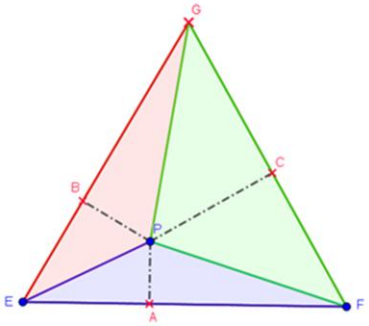
[0.5] مثال: ضرورة تعديل وإثراء المتعلّم تمثيله لمفهوم العدد بسبب التوسّعات المتتالية التي أعطيت لهذا المفهوم.

تمرين 2: [3+1ن] حل المشكل التالي مبيّنا الأدوات المستخدمة في الحل.

ليكن EFG مثلثا متقايس الأضلاع ولتكن P نقطة كيفية داخله؛ A ، B ، C مساقطها العمودية على أضلاعه.

– بيّن أن المجموع $PA+PB+PC$ ثابت وعيّن قيمته.

ليكن a طول ضلع المثلث المتقايس الأضلاع EFG و h ارتفاعه. نحسب مساحة المثلث EFG بطريقتين مختلفتين:



$$S_{EFG}=\frac{1}{2}a.h$$

$$S_{EFG}=S_{PEF}+S_{PEG}+S_{PFG}=\frac{1}{2}a.PA+\frac{1}{2}a.PB+\frac{1}{2}a.PC$$

ومنه: $PA+PB+PC=h$

الأدوات المستخدمة في الحل: مفهوم مساحة مثلث، خواص المثلث المتقايس الاضلاع

تمرين 3: [3+1ن] حل المشكل التالي مبيّنا الاستدلال المستعمل في الحل.

أثبت أن: $\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\ldots\times\frac{2021}{2020}<\sqrt{2021}$

طريقة 1: نضع $A=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2019}{2020}$ و $B=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{2020}{2021}$

لاحظ أن $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$ ، $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$ ، ... ، $\frac{2019}{2020}<\frac{2020}{2021}$. بأخذ الجداء طرف لطرف نجد $A<B$

وبالتالي $AB < B^2$ أي $\sqrt{AB} < B$ وبملاحظة أن $AB = \frac{1}{2021}$ ينتج المطلوب:

طريقة 2: يمكن إثبات صحة الخاصية $p(n): \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k} < \sqrt{2n+1}$ من أجل كل n من IN^* (باستخدام التراجع)

ثم استنتاج المطلوب بأخذ: $n = 1010$.

الاستدلال المستعمل في الحل: الاستنتاج.

تمرين 4: [2+1+2+1ن]

1) لتكن $\Omega_1(O_1;r_1)$ و $\Omega_2(O_2;r_2)$ دائرتان متماسّتان خارجيا في نقطة C وتمسّان داخليا دائرة معطاة $\Omega(O;r)$ في نقطتين A و B بهذا الترتيب. المستقيمان (AC) و (BC) يقطعان الدائرة $\Omega(O;r)$ ثانية في نقطتين E و D على التوالي.

– بيّن أن النقطتين E و D متقابلتان قطريا.

2) لتكن Γ دائرة معطاة.

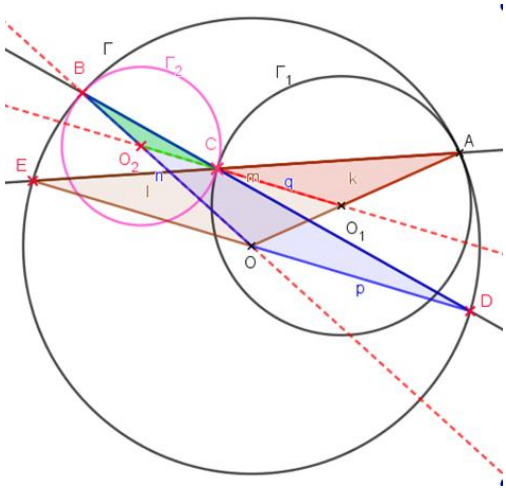
– أنشئ دائرتين Γ_1 و Γ_2 متماسّتان خارجيا وتمسّان داخليا الدائرة Γ. (يطلب إبراز مراحل الإنشاء)

1. إثبات أن النقطتين E و D متقابلتان قطريا (أي $[ED]$ قطر للدائرة $\Omega(O,r)$).

الدائرة $\Omega_1(O_1,r_1)$ تمس داخليا الدائرة Ω في النقطة A، إذن النقط O، O_1 و A في استقامية بهذا الترتيب.

الدائرة $\Omega_2(O_2,r_2)$ تمس داخليا الدائرة Ω في النقطة B، إذن النقط O، O_2 و B في استقامية بهذا الترتيب. الدائرتان Ω_1 و Ω_2 متماستان خارجيا في النقطة C، إذن النقط O_1، C و O_2 في استقامية بهذا الترتيب.

المثلثان ACO_1 و AEO متشابهان (متقايسا الساقين ولديهما زاوية قاعدة مشتركة رأسها A).



وعليه $\frac{AO_1}{AO} = \frac{AC}{AE} = \frac{CO_1}{EO}$، وبالتالي حسب المبرهنة العكسية لطالس ينتج:

$(O_1O_2)//(OE)$ أي: $(CO_1)//(EO)$

بنفس الطريقة نثبت أن المثلثين BCO_2 و BDO متشابهان.

ومنه: $(DO)//(CO_2)$ أي: $(DO)//(O_1O_2)$

إذن: $(DO)//(EO)$

ومنه النقطتين E و D متقابلتان قطريا.

2. مسألة الإنشاء:

أ) **التحليل:** (الهدف: إيجاد قواعد رياضياتية كافية تسمح بإنجاز الشكل المطلوب)

نعتبر أن المسألة تقبل حلا على الأقل وننشئ شكلا موافقا له.

ينتج من السؤال الأول أن $[ED]$ قطر في الدائرة $\Gamma(O,r)$

(E و D نقطتي التقاطع الثانيتين لكل من (AC) و (BC) مع الدائرة Γ بهذا الترتيب).

لدينا أيضا O_1 مركز الدائرة Γ_1 تنتج من تقاطع (OA) ومحور $[AC]$ (و O_2 تنتج من تقاطع (OB) ومحور $[BC]$).

ب) التركيب: (اقتراح خطوات كافية ومبرّرة "استنادا إلى مرحلة التحليل" تسمح بإنجاز الشكل المطلوب)

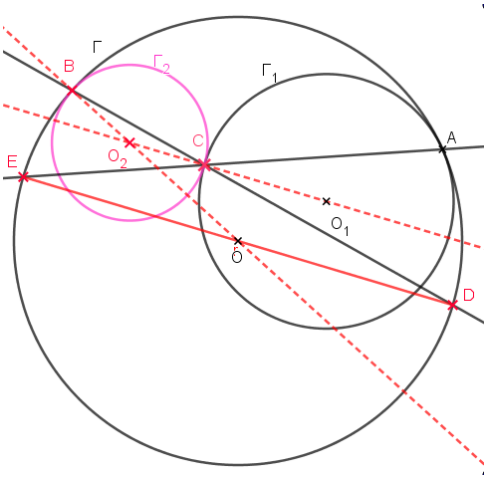
1) ننشئ دائرة $\Gamma_1(O_1,r_1)$ تمس داخليا الدائرة $\Gamma(O,r)$ في نقطة كيفية A .

2) نعين نقطة كيفية C من Γ_1 تختلف عن A وننشئ E نقطة التقاطع الثانية لـ Γ مع (AC).

3) نرسم $[ED]$ قطر للدائرة Γ وننشئ B نقطة التقاطع الثانية لـ Γ مع (DC).

4) ننشئ O_2 نقطة تقاطع (OB) و ومحور $[BC]$. ((O_2 مضمونة الوجود لأن B تقع على Γ و C داخلها؛ وبالتالي لا يمكن لـ (BC) أن يتحوّل إلى مماس لـ Γ في B ، مما يضمن عدم توازي (OB) ومحور $[BC]$)).

- بقي إثبات أن Γ_1 و Γ_2 متماستان خارجيا في النقطة C (يكفي إثبات أن النقط O_1 ، C و O_2 في استقامية لأن O_2 تقع خارج الدائرة Γ_1 لكونها عنصر من محور $[BC]$).



من تشابه المثلثين ACO_1 و AEO ينتج $(CO_1)//(EO)$ ؛

وبالمثل نجد: $(DO)//(CO_2)$ (من تشابه المثلثين BCO_2 و BDO).

ومنه النقط O_1 ، C و O_2 في استقامية ((لأن $(DO)=(EO)$)).

ج) المناقشة: (وجود وعدد الحلول)

- من أجل كل نقطة A من الدائرة Γ يمكن إنشاء عدد غير منته من الدوائر Γ_1 التي تمس Γ في النقطة A ، ومن أجل كل نقطة C من الدائرة Γ_1 تختلف عن A يمكن إنشاء دائرة أخرى Γ_2 تمس Γ_1 خارجيا في النقطة C وتمس الدائرة Γ داخليا في نقطة B تختلف عن A .

خلاصة: للمسألة عدد غير منته من الحلول (صنف منها تكون فيه الدائرتين Γ_1 و Γ_2 متناظرتان بالنسبة إلى مركز Γ).