5.1.3 عمليات على السلاسل الصحيحة

قضية 2.1.3 نعتبر في هذه الفقرة السلسلتين الصحيحتين $\sum_n a_n x^n$ و $\sum_n b_n x^n$، نصفا قطريهما على التوالي R و R'.

1- في حالة $R \neq R'$، فإن نصف قطر تقارب السلسلة المجموع $\sum_n (a_n + b_n)x^n$ هو $R'' = min(R, R')$،

2- و في حالة $R = R'$، فإن نصف قطر تقارب السلسلة المجموع $\sum_n (a_n + b_n)x^n$ هو $R'' \geq R$.

3- سلسلة جداء كوشي للسلسلتين $\sum_n a_n x^n$ و $\sum_n b_n x^n$، المعرفة بـ:

$$\sum_n w_n = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^{n-k}$$

هي سلسلة صحيحة نصف قطر تقاربها هو

$$R'' \geq min(R, R').$$

برهان

1- نفرض $R' < R$.

أ- إذا كان $|x| < R'$ فإن $|x| < R$. السلسلتين $\sum_n a_n x^n$ و $\sum_n a_n x^n$ متقاربتين مطلقا. بما أن:

$$|(a_n + b_n)x^n| \leq |a_n x^n| + |b_n x^n|;$$

نستنتج أن $\sum_n (a_n + b_n)x^n$ متقاربة مطلقا من أجل

$$|x| < R'' = minR, R'.$$

ب- إذا كان $|x| > R'$، نميز حالتين:

- حالة $R' < |x| < R$، السلسلة $\sum_n a_n x^n$ تتقارب مطلقا و $\sum_n b_n x^n$ تتباعد. إذن السلسلة $\sum_n (a_n + b_n)x^n$ تتباعد.

- إذا كان $R' < R < |x|$، السلسلتين متباعدتين. لنبرهن أن السلسلة $\sum_n (a_n + b_n)x^n$ متباعدة. باستعمال الخلف، إذا فرضنا السلسلة $\sum_n (a_n + b_n)x^n$ متقاربة حسب توطئة