3) السلسلة $\sum a_n x^n$ متقاربة ناظميا من أجل $|x| \leq r$ حيث $0 < r < |x_0|$.

الإثبات: بما أن المتتالية $(a_n x_0^n)_n$ محدودة إذن يوجد $M > 0$ بحيث:

$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n x_0^n| \leq M$,

(1): من أجل $|x| \leq |x_0|$، لدينا:

$$|a_n x^n| = \left|\frac{a_n x_0^n x^n}{x_0^n}\right| \leq M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

السلسلة $\sum \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ هندسية، أساسها $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ فهي متقاربة، ومنه التقارب المطلق للسلسلة الصحيحة $\sum a_n x^n$ من أجل $|x| \leq |x_0|$؛

(2) ليكن $0 < r < |x_0|$ وليكن $|x| < r$، لدينا:

$$|a_n x^n| = \left|\frac{a_n x_0^n x^n}{x_0^n}\right| \leq M \cdot \left|\frac{r}{x_0}\right|^n.$$

السلسلة $\sum \left|\frac{r}{x_0}\right|^n$ عددية هندسية، أساسها $\left|\frac{r}{x_0}\right| < 1$ فهي متقاربة، ومنه التقارب الناظمي للسلسلة $\sum a_n x^n$ من أجل $|x| \leq r$، مع $0 < r < |x_0|$.

I - 3. نصف قطر تقارب سلسلة صحيحة

نظرية: لتكن $\sum a_n x^n$ سلسلة صحيحة. يوجد عدد حقيقي وحيد R يحقق:

(1) السلسلة $\sum a_n x^n$ متقاربة مطلقا من أجل $|x| < R$،

(2) " $\sum a_n x^n$ متباعدة من أجل $|x| > R$.

الإثبات: باستعمال توطئة آبل،